UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

PENGUBAHSUAIAN KE ATAS KAEDAH KECERUNAN KONJUGAT UNTUK PEMINIMUMAN TAK BERKEKANGAN

NORFIFAH BACHOK @ LATI

FSAS 2003 34

PENGUBAHSUAIAN KE ATAS KAEDAH KECERUNAN KONJUGAT UNTUK PEMINIMUMAN TAK BERKEKANGAN

Oleh

NORFIFAH BACHOK @ LATI

Tesis Ini Dikemukakan Kepada Sekolah Pengajian Siswazah, Universiti Putra Malaysia, Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah Master Sains

Oktober 2003

Buat kedua ibu bapa
Bachok@Lati dan Bechek@Memek

teman tersayang
Norazak

dan penyeri kebahagian
Nor Fatin Aqilah
Muhammad Farhan Aqil
Muhammad Fath Hadif

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains

PENGUBAHSUAIAN KE ATAS KAEDAH KECERUNAN KONJUGAT UNTUK PEMINIMUMAN TAK BERKEKANGAN

Oleh

NORFIFAH BT. BACHOK @ LATI

Oktober 2003

Pengerusi : Prof. Madya Dr. Malik Hj. Abu Hassan

Fakulti : Sains dan Pengajian Alam Sekitar

Penumpuan utama tesis ini adalah dalam usaha mencari penyelesaian berangka untuk masalah pengoptimuman tak linear tak berkekangan. Kami mempertimbangkan suatu kaedah pengoptimuman yang terkenal disebut kaedah kecerunan konjugat. Khususnya, satu kelas kaedah kecerunan konjugat bernama kaedah Fletcher-Reeves akan difokuskan.

Kami lanjutkan analisis kami kepada tatacara gelintaran garis baru yang diperkenalkan oleh (Potra dan Shi, 1995). Kami seterusnya menerbitkan dua teknik pembaikan: yang pertama kami menggunakan satu kriteria penukaran di antara arah kecerunan konjugat dan kuasi-Newton dan untuk yang kedua, kami memperkenalkan penggunaan arah kelengkungan negatif dalam gabungan linear bagi kaedah kecerunan konjugat dan kuasi-Newton. Tesis ini akan meliputi keputusan-keputusan yang menghuraikan persembahan berangka bagi kaedah-kaedah terubahsuai ke atas suatu set fungsi ujian yang dipilih.

Kesimpulan dan beberapa kemungkinan kajian lanjutan akan diberi untuk mengakhiri tesis ini. Penggunaan tatacara gelintaran garis baru, penukaran di antara arah kecerunan konjugat dan kuasi-Newton dan penggunaan arah kelengkungan negatif dalam gabungan linear bagi kaedah kecerunan konjugat dan kuasi-Newton memberikan keputusan berangka yang lebih baik.

Abstract of thesis presented to the Senate of Universiti Putra Malaysia ın fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science

ON THE MODIFICATIONS OF A CONJUGATE GRADIENT METHOD FOR UNCONSTRAINED MINIMIZATION

By

NORFIFAH BT. BACHOK @ LATI

October 2003

Chairman : Associate Professor Dr. Malik Hj. Abu Hassan

Faculty : Science and Environmental Studies

The study concerns mainly determining the numerical solutions of non-linear unconstrained problems. We consider a well-known class of optimization methods called the conjugate gradient methods. In particular, a class of conjugate gradient method named Fletcher-Reeves method is focused.

We continue our analysis for the new line search algorithm introduced by (Potra and Shi, 1995). We then derive two improvement techniques: firstly we employ a switching criteria between conjugate gradient and quasi-Newton direction and secondly we introduce the use of negative curvature directions in the linear combination of conjugate gradient and quasi-Newton methods. The thesis includes results illustrating the numerical performance of the modified methods on a chosen set of problems function.

Conclusion and some possible extensions are also given to conclude this thesis. The use of new line search algorithm, switching criteria between conjugate gradient and guasi-Newton direction and the use of negative curvature directions in the linear combination of conjugate gradient and quasi-Newton methods give a better numerical results.

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah yang Maha Pemurah dan Maha Pengasih. Segala pujian bagi Allah, Tuhan semesta alam dan selawat dan salam ke atas junjungan besar Nabi Muhammad s.a.w., keluarganya serta para sahabatnya.

Pertama sekali diucapkan jutaan terima kasih kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan Professor Madya Dr Malik Hj. Abu Hassan atas segala bimbingan dan bantuan yang tidak ternilai. Juga jutaan terima kasih ditujukan kepada ahli-ahli yang terdiri daripada Dr Mohd. Rizam Abu bakar dan Pn. Suriah Md. Amin kerana dorongan dan motivasi yang diberikan.

Seterusnya segala ucapan ditujukan kepada suami tersayang serta anak-anak tercinta atas segala pengorbanan, dorongan, sokongan serta kesabaran yang telah dicurahkan.

Tesis ini dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia dan telah diterima sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains. Anggota Jawatankuasa Penyeliaan adalah seperti berikut:

Malik bin Hj. Abu Hassan, Ph.D.
Profesor Madya
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Putra Malaysia
(Pengerusi)

Mohd. Rizam bin Abu Bakar, Ph.D.
Pensyarah
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Putra Malaysia
(Ahli)

Suriah bt. Md. Amin
Pensyarah
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Putra Malaysia
(Ahli)

AINI IDERIS, Ph.D.
Profesor/Dekan
Sekolah Pengajian Siswazah
Universiti Putra Malaysia

Tarikh:

PERAKUAN

Saya mengaku bahawa tesis ini adalah hasil kerja saya yang asli melainkan petikan dan sedutan yang telah diberikan penghargaan di dalam tesis. Saya juga mengaku bahawa tesis ini tidak dimajukan untuk ijazah-ijazah lain di Universiti Putra Malaysia atau institusi-institusi lain.

NORFIFAH BT. BACHOK@LATI

Tarikh:

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

Jadual		Mukasurat

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

1. $\mathbb{R}^n$ menandakan ruang nyata linear n-matra.

2. g ialah vektor kecerunan $n \times 1$ bagi $f(x)$, iaitu

$$g_i = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

3. G ialah matriks Hessian $n \times n$ bagi $f(x)$, dengan unsur ke-(i, j) bagi G, $G(i, j)$ diberi oleh

$$G_{i,j} = \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x_i \partial x_j}, \quad \begin{array}{l} i = 1, 2, \ldots, n. \\ j = 1, 2, \ldots, n. \end{array}$$

4. H_k ialah matriks $n \times n$ iaitu penghampiran ke-k bagi G^{-1}.

5. x_k ialah penghampiran ke-k x^*, minimum bagi $f(x)$.

6. $f_k = f(x_k)$.

7. g_k ialah vektor kecerunan bagi $f(x)$ pada x_k.

8. A^T menandakan matriks transposisi bagi A.

9. C^r menandakan kelas fungsi dengan terbitan ke-r selanjar.

10. $\|y\|$ menandakan norma mutlak bagi y.

11. min menandakan minimum.

12. maks menandakan maksimum.

13. KK menandakan kecerunan konjugat.

14. KN menandakan kuasi-Newton.

15. GL menandakan gabungan linear.

BAB 1

PENGENALAN

1.1 Penyusunan Tesis

Dalam tesis ini, kami memberi lebih perhatian dalam mendapatkan penyelesaian berangka bagi masalah pengoptimuman tak linear. Kami mulakan bab ini dengan memberi maklumat tentang pengenalan kepada takrif pengoptimuman tak linear. Bab 1 juga menghuraikan beberapa sifat fungsi nilai nyata yang kerap digunakan dalam penyelesaian berangka bagi masalah pengoptimuman dan khususnya dalam peminimuman fungsi nilai nyata.

Dalam Bab 2, kami pertimbangkan kelas yang terkenal bagi kaedah pengoptimuman yang dipanggil kaedah kecerunan konjugat. Keputusan bagi kaedah kecerunan konjugat secara umum dan penumpuan sejagatnya turut dibincangkan. Seterusnya, ditunjukkan perbezaan antara sifat penumpuan ke atas kaedah jenis Fletcher-Reeves dan jenis Polak-Ribiere dengan mengemukakan dua contoh tak menumpu bagi kaedah Polak-Ribiere.
Dalam Bab 3, kami pertimbangkan pula kaedah yang juga terkenal bagi kaedah pengoptimuman yang dipanggil kaedah kuasi-Newton, atau kaedah metrik berubah. Teori, syarat dan motivasi bagi kaedah ini juga ditunjukkan.

Dalam Bab 4, kami lanjutkan analisis kami kepada tatacara gelintaran garis baru yang diperkenalkan oleh (Potra dan Shi, 1995). Kami mulakan dengan menerangkan tatacara gelintaran garis baru, algoritma dan sifat asas, teori penumpuan dan sifat asimptotnya.

Keputusan berangka yang diperoleh menunjukkan kecekapan gelintaran garis baru tersebut.

Bab 5 dan 6 pula mengandungi huraian tiga pengubahsuaian algoritma kecerunan konjugat bagi peminimuman tak berkekangan. Keputusan berangka yang diberi menunjukkan kecekapan algoritma baru. Seterusnya, pembuktian penumpuan bagi setiap kaedah pengubahsuaian turut diberikan.

Kesimpulan keseluruhan kajian serta beberapa cadangan untuk kajian lanjutan bagi penyelidik bidang pengoptimuman diutarakan dalam Bab 7.

1.2 Sorotan Masalah

Pengoptimuman tak linear adalah mengenai kaedah untuk melokasikan nilai terkecil (minimum) atau nilai terbesar (maksimum) bagi fungsi tak linear bagi sebarang bilangan pembolehubah tak bersandar yang dirujuk sebagai fungsi objektif. Masalah nilai terkecil dipanggil peminimuman dan masalah nilai terbesar dipanggil pemaksimuman. Sebarang masalah pemaksimuman boleh ditukar menjadi masalah peminimuman dengan mendarabkan fungsi objektif dengan faktor -1. Maka tidak perlu pertimbangkan dua aspek ini bagi masalah berasingan. Kami gunakan konvensyen biasa bagi membincangkan perkara ini dalam sebutan berkaitan dengan peminimuman. Bila masalah penyelesaiannya tidak bergantung kepada apa-apa syarat bagi pembolehubah tak bersandar, ia dikatakan masalah pengoptimuman tak berkekangan.

1.3 Takrif Asas dan Teorem

Tujuan bahagian ini ialah untuk mengemukakan sifat fungsi nilai nyata yang selalu digunakan dalam penyelesaian berangka bagi masalah pengoptimuman dan khususnya dalam peminimuman fungsi nilai nyata yang akan menjadi fungsi objektif. Seterusnya, kita akan gunakan tandaan piawai $\|x\|, \|x-y\|, S(x,\varepsilon), S[x,\varepsilon]$ masing-masing bagi menandakan norma Euklidan bagi $x \in \mathbb{R}^n$, jarak Euklidan bagi pasangan $x, y \in \mathbb{R}^n$, sfera terbuka dan tertutup dengan pusat $x \in \mathbb{R}^n$ dan jejari $\varepsilon > 0$. Dalam pengoptimuman masalah berikut menjadi tumpuan kami.

Masalah 1.1 Peminimuman Sejagat

Biarkan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ set tertutup dan biarkan $f: X \to \mathbb{R}$. Dapatkan titik $x^* \in X$ sedemikian hingga

$$f(x^*) \leq f(x)$$

untuk semua $x \in X$.

Masalah 1.2 Peminimuman Setempat

Biarkan $X \subseteq \mathbb{R}^n$ set tertutup dan biarkan $f: X \to \mathbb{R}$. Dapatkan titik $x^* \in X$ dan nombor nyata $\varepsilon > 0$ sedemikian hingga

$$f(x^*) \leq f(x)$$

untuk semua $x \in S(x,\varepsilon) \cap X$.

Takrif 1.1 Setiap titik $x^* \in \mathbb{R}^n$ adalah sama ada penyelesaian bagi Masalah 1.1 atau Masalah 1.2. Masing-masing akan dipanggil peminimum sejagat atau setempat dan nilai fungsi $f\left(x^*\right)$ yang sepadan ialah minimum sejagat atau setempat. Peminimum $x^* \in \mathbb{R}^n$ akan dipanggil terpencil jika tidak wujud sebarang peminimum dalam kejiranan yang cukup kecil bagi x^*.

Ulasan 1.1 Apabila peminimum sejagat bagi $f\left(x^*\right)$ tidak unik, maka wujud hanya satu nilai fungsi minimum sejagat (atau mutlak) $f\left(x^*\right)$.

Ulasan 1.2 Sebagai kes khusus bagi kedua-dua Masalah 1.1 dan Masalah 1.2, kami pertimbangkan hanya kes $X = \mathbb{R}^n$ yang dipanggil peminimuman tak berkekangan bagi $f(x)$. Oleh itu untuk bahagian dalam bab seterusnya, kami pertimbangkan hanya $X = \mathbb{R}^n$.

Syarat perlu dan cukup bagi kewujudan dan keunikan penyelesaian bagi peminimuman Masalah 1.1 dan Masalah 1.2 diberi oleh sifat fungsi f. Untuk perkembangan selanjutnya, adalah berfaedah mentakrifkan set terbesar bagi titik yang mana sifatnya dalam Masalah 1.2 adalah benar terhadap sesuatu minimum terpencil x^*, yang dipanggil rantau tarikan bagi x^*.

Takrif 1.2 Pertimbangkan minimum setempat terpencil $x^* \in X$ bagi fungsi nilai nyata $f : X \to \mathbb{R}$, maka kejiranan berkait terbuka terbesar bagi x^*, $M(x^*)$ dengan

$$f(x^*) \leq f(x) \text{ untuk setiap } x \in M(x^*) \subset \mathbb{R}^n$$

dipanggil rantau menurun kepada x^*.

Takrif 1.3 Untuk setiap minimum setempat terpencil $x^* \in \mathbb{R}^n$ bagi f dan setiap nombor nyata $k > 0$, pertimbangkan komponen berkait $M_k'(x^*)$ yang mengandungi x^* bagi set

$$f(x^*) \leq f(x) < f(x^*) + k$$

dengan

$$M_k'(x^*) \subset M(x^*).$$

Seterusnya pertimbangkan set terbuka berkait $N(x^*) \subset \mathbb{R}^n$ yang ditakrifkan sebagai

$$N(x^*) = \bigcup_{k>0} M_k'(x^*);$$

set $N(x^*)$ dipanggil rantau tarikan bagi x^* dan mencamkan semua titik yang bersekutu dengan x^*.

Ia juga penting bagi membincangkan beberapa sifat bagi f iaitu keselanjaran, keselanjaran Lipschitz dan boleh beza.

Takrif 1.4 Fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ adalah selanjar pada $x \in X$ jika $S(x,\delta) \cap X \neq \{x\}$ untuk semua $\delta > 0$ dan untuk semua $\varepsilon > 0$ wujud $\delta > 0$ sedemikian hingga $y \in S(x,\delta)$ mengimplikasikan $|f(y) - f(x)| < \varepsilon$. Jika f selanjar untuk semua titik $x \in X$, ia dikatakan selanjar dalam *X*.

Ulasan 1.3 Jika $\alpha \in \mathbb{R}$ dan $f: X \to \mathbb{R}$ selanjar dalam $\mathbb{R}^n$, maka set

$$N(\alpha) = \{x \in \mathbb{R}^n : f(x) < \alpha\} \tag{1.1}$$

adalah terbuka; jika $N(\alpha) \cap X$ tak hampa dan terbatas untuk beberapa $\alpha \in \mathbb{R}$, maka wujud sekurang-kurangnya satu penyelesaian bagi peminimuman sejagat Masalah 1.1 yang terkandung dalam $N(\alpha) \cap X$. Set $N(\alpha)$ akan dipanggil set paras bagi fungsi f.

Jika set $N(\alpha)$ tidak berkait iaitu ia boleh dipetakkan kedalam penyatuan bagi set terbuka tak bercantum, yang dipanggil komponen, maka setiap komponen $N(\alpha)$ dengan persilangan tak hampa dan terbatas dengan *X* mengandungi sekurang-kurangnya satu penyelesaian bagi minimum setempat Masalah 1.2.

Keputusan ini membenarkan kami membuktikan kewujudan dan bilangan penyelesaian minimum bagi sebarang masalah pengoptimuman. Kunci bagi syarat itu ialah kewujudan komponen terbatas bagi $N(\alpha)$.

Ia mungkin kerap berlaku yang keselanjaran fungsi objektif di atas tidak menjamin kesudahan yang positif bagi kaedah penghampiran berangka untuk penyelesaian masalah pengoptimuman. Syarat kukuh yang mungkin diperlukan untuk kes ini ialah fungsi objektif f menjadi Lipschitzan.

Takrif 1.5 Fungsi $f : X \to \mathbb{R}$ dikatakan Lipschitzan sejagat atas X jika wujud nombor nyata $L > 0$ yang dipanggil pemalar Lipschitz, sedemikian hingga

$$|f(x) - f(y)| \qquad \text{untuk semua} \quad x, y \in X .$$

Fungsi f dikatakan Lipschitzan setempat dalam X jika bagi setiap $x \in X$ wujud bulatan $S(x, \varepsilon)$ dan nombor nyata $L(x) > 0$ sedemikian hingga

$$|f(x) - f(y)| \qquad \text{untuk semua} \quad x, y \in S(x, \varepsilon) \cap X .$$

Ulasan 1.4 Pengetahuan mengenai pemalar Lipschitz L bagi fungsi Lipschitzan ke atas set padat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ adalah berguna dalam beberapa masalah peminimuman sejagat. Sesungguhnya bila fungsi objektif f adalah Lipschitzan atas set padat $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ dan pemalar Lipschitz diketahui, beberapa kaedah khusus boleh digunakan berdasarkan ke atas pembinaan penghampiran linear cebis demi cebis daripada bawah $f_1(x)$ bagi $f(x)$, dengan

$$f_1(x) \leq f(x) \text{ untuk semua } x \in \Omega .$$

Ia juga penting untuk membincangkan kewujudan terbitan, boleh beza, boleh beza dua kali, boleh beza secara selanjar, boleh beza secara selanjar dua kali, kecembungan bagi fungsi f dan hubungan antara titik genting (atau keseimbangan).

Takrif 1.6 Diberi fungsi $f: X \to \mathbb{R}$, kita katakan pada titik x wujud n terbitan separa pertama f jika semua had

$$\underset{h\to 0}{had} \frac{\left(f\left(x+he_i\right)-f\left(x\right)\right)}{h}, \quad i=1,2,\ldots,n \tag{1.2}$$

wujud dan ia terhingga. Dalam (1.2) e_i menandakan vektor bagi paksi koordinat ke-i. Jika pada titik $x \in X$, wujud n terbitan separa pertama bagi $f(x)$, n-vektor $g(x)$ ditakrifkan secara-komponen melalui hubungan

$$\nabla f(x) = g_i(x) = \frac{\partial f(x)}{\partial x_i}, \quad i=1,2,\ldots,n$$

yang dipanggil sebagai kecerunan f.

Takrif 1.7 Fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ dikatakan boleh beza pada titik $x \in X$ jika pada titik x pada semua n terbitan separa pertama bagi f wujud dan sebagai tambahan

$$\underset{y\to x}{had} \frac{\left(f(y)-f(x)-(y-x)^T g(x)\right)}{\|y-x\|} = 0.$$

Takrif 1.8 Fungsi $f: X \to \mathbb{R}$ dikatakan boleh beza pada titik $x \in X$ jika semua n terbitan separa pertama wujud dalam kejiranan x dan ia selanjar dalam x.

Takrif 1.9 Fungsi $f \in C^1$ jika boleh beza secara selanjar dalam X.

Ulasan 1.5 Tiga sifat berikut yang kami huraikan adalah berkait dengan hubungan:

Boleh beza secara selanjar $\rightarrow$ boleh beza $\rightarrow$ Lipschitz setempat $\rightarrow$ keselanjaran.

Umumnya, hubungan sebaliknya tidak benar.

Jika fungsi nilai nyata boleh beza secara selanjar dalam kejiranan suatu minimum, maka ia mempunyai kelakuan sekata dalam kejiranan ini. Kesekataan ini membenarkan pencirian kuat bagi minimum.

Takrif 1.10 Biarkan $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ boleh beza secara selanjar pada semua titik dalaman bagi X. Titik $x^* \in X$ sedemikian hingga

$$g\left(x^*\right) = 0 \tag{1.3}$$

dipanggil titik genting (atau keseimbangan) bagi f.

Ulasan 1.6 Jika $x^* \in \mathbb{R}^n$ ialah minimum setempat bagi fungsi nilai nyata $f : X \rightarrow \mathbb{R}$ boleh beza secara selanjar maka x^* ialah titik genting bagi f, iaitu (1.3) benar.

Titik genting memainkan peranan utama dalam masalah peminimuman tak berkekangan. Sesungguhnya, bukan hanya struktur topologi bagi fungsi dalam kejiranan minimum yang sekata, tetapi kebanyakan algoritma peminimuman setempat berdasarkan ke atas gelintaran titik genting bagi f, iaitu ke atas penyelesaian sistem bagi n persamaan aljabar dalam n anu

$$g(x) = 0$$

yang mengecamkan semua titik genting bagi f.

Pertimbangkan persamaan pembezaan

$$\dot{x} = g(x) \tag{1.4}$$

bila fungsi nilai nyata f boleh beza secara selanjar menyediakan alat yang sangat berguna bagi mencirikan sifat titik genting bagi f. Sebelum membincangkan syarat tambahan yang mesti dikenakan ke atas f supaya persamaan (1.4) boleh digunakan, adalah penting untuk menarik perhatian bahawa titik genting bagi f sekena dengan titik keseimbangan bagi (1.4), iaitu titik x^* adalah sedemikian hingga

$$\dot{x} = g(x^*) = 0. \tag{1.5}$$

Tambahan pula, jika kita pertimbangkan penyelesaian $x = x(x^\circ, t)$ bagi persamaan (1.5), kita lihat titik genting x^* yang menjadi minimum bagi f adalah juga titik keseimbangan bagi (1.5) yang stabil secara asimptot (iaitu stabil dan $had_{t \to +\infty} x(x^\circ, t) \to x^*$ untuk setiap $x^\circ \in S(x^*, \varepsilon), \varepsilon > 0$) , sementara titik genting yang menjadi titik pelana bagi f adalah juga titik pelana bagi (1.5).

Masalah akhir yang hendak diingat kembali ialah rantau tarikan bagi suatu minimum dan sempadannya. Rantau tarikan bagi suatu minimum setempat (terpencil) ditakrifkan dalam Takrifan 1.2 bila fungsi f boleh beza secara selanjar. Rantau tarikan boleh ditakrifkan dalam cara lain yang ada kaitan dengan sifat persamaan pembezaan (1.4) dan keterangan diberi dalam set ini.

Takrif 1.11 Jika $x^* \in \mathbb{R}^n$ ialah minimum setempat terpencil bagi fungsi nilai nyata dan boleh beza secara selanjar $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, pertimbangkan persamaan pembezaan biasa (1.4), maka set bagi semua titik x^* sedemikian hingga

$$\underset{t \to +\infty}{had}\, x\left(x^0, t\right) = x^*$$

dengan $x\left(x^0, t\right)$ penyelesaian bagi (1.4) dan $x\left(x^0, 0\right) = x^0$, dipanggil rantau tarikan bagi x^*.

Ulasan 1.7 Daripada keputusan teori kestabilan persamaan pembezaan, rantau tarikan adalah set terbuka. Untuk menggunakan persamaan pembezaan (1.4) kita mesti membuat beberapa andaian kesekataan sedemikian hingga jika $g(x)$ ialah Lipschitzan, penyelesaian bagi (1.4) adalah unik untuk setiap x^0, maka teori sistem dinamik boleh digunakan.

Sifat dan kedudukan titik genting bagi fungsi boleh beza secara selanjar dan bernilai nyata menjejaskan sifat set paras $N(\alpha)$, (1.1) bagi f. Hubungan antara titik genting dan sifat topologi bagi $N(\alpha)$ diwakilkan dengan teorem berikut tanpa pembuktian.