UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASILTAMBAH EKSPONEN DUA PEMBOLEHUBAH

SITI HASANA BINTI SAPAR

SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASILTAMBAH EKSPONEN DUA PEMBOLEHUBAH

SITI HASANA BINTI SAPAR

MASTER SAINS
UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

2001

SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASIL TAMBAH EKSPONEN DUA PEMBOLEHUBAH

Oleh

SITI HASANA BINTI SAPAR

Tesis Yang Dikemukakan Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah Master Sains
di Fakulti Sains Dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Putra Malaysia

Februari 2001

Salam kasih dan sayang

Sapar Dimen
Aishah Kassan

Ajwad Abu Hassan
Nurul Atikah

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains.

SATU KAEDAH PENGANGGARAN HASILTAMBAH EKSPONEN DUA PEMBOLEHUBAH

Oleh

SITI HASANA BINTI SAPAR

Februari 2001

Pengerusi : Profesor Dr. Kamel Ariffin bin Mohd Atan

Fakulti : Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar

Katakan $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ suatu vektor dalam ruang Z^n dengan Z menandakan gelanggang integer dan katakan q integer positif dan f suatu polinomial dalam $\underline{X}$ berpekalikan unsur dalam Z. Hasil tambah eksponen yang disekutukan dengan f ditakrifkan sebagai $S(f;q) = \sum e^{\frac{2\pi i f(x)}{q}}$ yang dinilaikan bagi semua nilai x di dalam set reja lengkap modulo q.

Peranan anggaran $S(f\,;q)$ adalah penting dalam beberapa bidang kajian teori nombor analisis. Ianya dapat membantu menghasilkan keputusan-keputusan yang lebih jitu dalam masalah-masalah yang berkaitan. Seperti yang telah ditunjukkan oleh beberapa penyelidik terdahulu, antaranya Loxton dan Smith, nilai $S(f\,;q)$ adalah bersandar kepada penganggaran bilangan unsur |V| yang terdapat dalam set

$$V = \left\{ \underline{X} \bmod q \mid \underline{f}_{\underline{X}} \equiv \underline{0} \bmod q \right\}$$

dengan $\underline{f}_{\underline{X}}$ menandakan polinomial-polinomial terbitan separa f terhadap $\underline{X} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$.

Kajian yang dijalankan merupakan lanjutan daripada kajian pengkaji-pengkaji dahulu. Penyelidikan ini menumpukan kepada masalah penentuan mencari pensifar dalam kes-kes berlakunya pertindihan di bucu dan sisi-sisi gambarajah penunjuk bagi polinomial berdarjah dua dan tiga, seterusnya mencari penganggaran hasil tambah eksponen bagi polinomial-polinomial tersebut. Pendekatan yang dilakukan ialah dengan menggunakan kaedah p-adic dan Teknik Polihedron Newton yang disekutukan dengan polinomial-polinomial terbabit.

Abstract of thesis presented to the Senate of Universiti Putra Malaysia in fulfilment of the requirement for the degree of Master of Science

A METHOD FOR AN ESTIMATION OF EXPONENTIAL SUM IN TWO VARIABLES

By

SITI HASANA BINTI SAPAR

February 2001

Chairman : Professor Dr. Kamel Ariffin Bin Mohd Atan

Faculty : Faculty of Science and Environmental Studies

Let $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ be a vector in a space Z^n with Z ring of integer and let q a positive integer and f a polynomial in $\underline{X}$ with coefficients in Z. The exponential sum associated to f is defined as $S(f;q) = \sum e^{\frac{2\pi i f(x)}{q}}$, where the sum is taken over a complete set of residues modulo q.

Estimation of $S(f;q)$ is important in several areas of Analytic Number Theory. It could help to yield a more accurate result in related problems. As shown by several previous researchers, among them Loxton and Smith, they show that the value of $S(f;q)$ depends on the estimation of the number $|V|$, the number of elements contained in the set

$$V = \{\underline{X} \bmod q \mid f_{\underline{X}} \equiv \underline{0} \bmod q\}$$

with $f_{\underline{X}}$ as the partial derivative of f with respect to $\underline{X} = (x_1, x_2, ..., x_n)$.

Our research is a continuation of research done before. This research concentrates on the problem of determining the common zeroes in cases where overlapping occurs at vertices and line segments of indicator diagrams associated for second and third degree polynomials. Subsequently estimations for of an exponential sum for these polynomials are arrived at. The approach is done by using p-adic method and the Newton Polyhedron Techniques which are associated with these polynomials.

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah yang Maha Pemurah lagi Maha Mengasihani. Kesyukuran yang tidak terhingga kehadrat Ilahi kerana dengan limpah kurnianya dapat saya menyiapkan tesis ini.

Pertama sekali jutaan terima kasih diucapkan kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan iaitu Professor Dr. Kamel Ariffin bin Mohd Atan diatas segala kesabaran, sokongan, bantuan, dorongan dan bimbingan beliau dapat saya menyiapkan tesis ini.

Ribuan terima kasih juga diucapkan kepada Dr. Hj. Ismail bin Abdullah dan Dr. Mohd Rushdan bin Md. Said kerana bantuan dan tunjukajar yang telah mereka berikan disepanjang saya menyelesaikan tesis ini.

Akhir sekali saya ingin merakamkan penghargaan buat ahli keluarga terutamanya Ibu, Abah, suami dan anak kerana tidak jemu memberi dorongan dan semangat sehinggalah penulisan ini selesai.

Tesis ini telah diserahkan kepada Senat Universiti Putra Malaysia dan telah diterima sebagai memenuhi keperluan untuk Ijazah Master Sains.

KAMIS AWANG, Ph.D.
Profesor Madya
Dekan Pusat Pengajian Siswazah
Universiti Putra Malaysia

Tarikh :

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

22 Gabungan gambarajah penunjuk bagi $G(X,Y) = 3aX^2 + 6ax_0X + f_x(x_0,y_0)$ dan $H(X,Y) = 3bY^2 + 6by_0Y + f_y(x_0,y_0)$ 82

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

p	Nombor perdana
α	Eksponen nombor perdana
Z	Gelanggang Integer
Q	Medan Nombor Nisbah
Z_p	Gelanggang Integer p-adic
Q_p	Medan Nombor Nisbah p-adic
Ω_p	Perluasan medan tutupan aljabar
$[\alpha]$	Integer terbesar yang kecil atau sama dengan α
$\underline{x}$	n-rangkap pembolehubah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$
$\underline{f}$	m-rangkap polinomial $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $m \geq 1$
darjh $\underline{f}$	Darjah polinomial $\underline{f}$
$J_{\underline{f}}$	Matriks Jacobian bagi $\underline{f}$
$ord_p a$	Kuasa tertinggi p yang membahagi a.
$\overline{Q}_p$	Tutupan Aljabar Q_p
$S(f;q)$	Hasil tambah eksponen
$\nabla \underline{f}$	Kecerunan $\underline{f}$
$D(\underline{f})$	Pembeza layan $\underline{f}$
N_f	Polihedron Newton
V	Bucu pada N_f
E	Sisi pada N_f
L	Unjuran sisi pada N_f
δ	Pembezalayan
$V(\underline{f}; p^{\alpha})$	Set $\{\underline{x} \bmod p^{\alpha} : \underline{f} \equiv 0 \bmod p^{\alpha}\}$

$N(\underline{f};p^{\alpha})$	Kekardinalan bagi set $V(\underline{f};p^{\alpha})$
$G_f(u)$	Hasil tambah Gaussian
maks	Maksimum
min	Minimum
mod	Modulo
eksp	Eksponen
$e_k(f(t))$	$e^{2\pi i f(t)/k}$
Σ	Hasil tambah
Δ	Pembezalayan separa
inf	Infimum
sup	Supremum
pen $J_{\underline{f}}$	Penentu Matriks Jacobian bagi $\underline{f}$

BAB I

PENGENALAN

Latar Belakang

Dalam Teori Nombor Analisis, ramai pengkaji telah memperihalkan peranan penting hasil tambah eksponen di antaranya ialah Davenport(1959) , Igusa(1978) dan Schmidt(1982). Hasil tambah eksponen ditakrifkan sebagai

$$S(f;q) = \sum e_q(f(\underline{x}))$$

dengan hasil tambah dinilaikan bagi $\underline{x}$ dalam set lengkap reja $mod\, q$.

Hardy dan Littlewood (1919), Deligne (1974), Loxton dan Vaughan (1985) dan ramai lagi telah mengkaji hasil tambah $S(f;q)$ dengan f polinomial tak linear dalam $Z[x]$. Hasil tambah $S(f;q)$ dalam kes satu pembolehubah telah dikaji oleh Hardy dan Littlewood (1919) berhubung dengan masalah Waring.

Pada tahun 1940, Hua telah mendapati bahawa untuk sebarang $\varepsilon > 0$, maka

$$| S(f;q) | \leq cp^{1-\left(1/m\right)+\varepsilon}$$

dengan c pemalar yang bersandar kepada m dan ε sahaja. Keputusan Hua telah diperbaiki oleh Jing-Run Chen (1977) yang menunjukkan bahawa jika kandungan bagi $f - f(0)$ perdana relatif terhadap q, maka

$$|S(f;q)| \leq e^{7(n+1)} q^{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Anggaran Hua telah digunakan oleh Stechkin (1980) bagi menunjukkan bahawa

$$|S(f;q)| \le c^m q^{1-\frac{1}{m}} (c(f),q)^{\frac{1}{m}}$$

untuk pemalar mutlak positif c tertentu, dengan $c(f)$ menandakan kandungan bagi $f - f(0)$.

Pada tahun 1974 pula Deligne menunjukkan bahawa untuk suatu nombor perdana p,

$$|S(f;p)| \le (m-1)^n p^{\frac{n}{2}}$$

dengan m menyatakan jumlah darjah bagi sesuatu polinomial f, apabila bahagian homogen bagi f berdarjah terbesar tak singular modulo p. Kajian Deligne ini membuka jalan bagi mendapatkan anggaran yang lebih tepat bagi $|S(f;q)|$ untuk polinomial am f dalam beberapa pembolehubah. Contohnya pada tahun 1985, Loxton dan Vaughan telah mendapat anggaran yang lebih tepat bagi hasil tambah $|S(f;q)|$. Walaubagaimanapun keputusan yang umum bagi polinomial untuk beberapa pembolehubah masih lagi dalam pencarian.

Peranan Poligon Newton bagi mendapatkan sifat-sifat pensifar polinomial dalam satu pembolehubah telah diketahui umum. Misalnya dalam membuktikan Teorem Puiseux, iaitu dalam memperkembangkan siri kuasa bagi fungsi algebra, Poligon Newton telah digunakan. Sathye (1983) juga menggunakan kembangan am Newton Puiseux, walaupun dengan menggunakan kaedah yang berlainan. Loxton dan Smith (1986) telah mengkaji penggunaan Poligon Newton bagi mendapatkan keputusan yang sama dengan Sathye(1983).

Dalam kes p-adic pula, Poligon Newton dapat menghasilkan maklumat yang lengkap mengenai saiz dan bilangan pensifar bagi polinomial satu pembolehubah dengan pekali dalam Ω_p iaitu tutupan aljabar bagi medan nombor p-adic Q_p.

Pada tahun 1977 pula Koblitz memperkenalkan Poligon Newton dalam kes p-adic bagi polinomial siri kuasa dalam $\Omega_p[x]$ dengan Ω_p perluasan medan tutupan aljabar bagi Q_p. Beliau menunjukkan bahawa jika λ kecerunan bagi suatu tembereng pada Poligon Newton bagi suatu polinomial f dengan beza N, antara ordinat-ordinat-x titik hujung tembereng itu, maka terdapat N pensifar bagi f dengan peringkat p-adic - λ.

Bagi sebarang perdana p, tuliskan $\underline{f} = (f_1, f_2, ..., f_n)$ untuk menandakan vektor n-polinomial dengan pekali dalam Z_p set integer p-adic dan $\underline{x} = (x_1, x_2, ... x_n)$.

Pertimbangkan

$$V(f; p^\alpha) = \{\underline{u} \bmod p^\alpha \mid f(\underline{u}) \equiv \underline{0} \bmod p^\alpha\}$$

dan biarkan $N(\underline{f}; p^\alpha)$ menandakan kekardinalan bagi $V(f; p^\alpha)$ dengan $\alpha > 0$ dan $\underline{u}$ mengambil nilai dalam set reja lengkap modulo p^α.

Loxton dan Smith (1982) mengkaji penggunaan Poligon Newton dan memperolehi keputusan yang berikut :

Katakan K medan nombor aljabar yang dijanakan oleh ξ_i pensifar kepada $f(x)$ dalam $Z[x]$ dengan $1 < i \leq m$, maka

$$N(f;p^{\alpha}) \leq mp^{\alpha-(\alpha-\delta)/e}$$

jika $\alpha > \delta$. Di sini m adalah bilangan punca yang berlainan $f(x)$ dan $\delta = ord_p D(f)$ dengan $D(f)$ merupakan persilangan unggulan pecahan K yang dijana oleh

$$\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i!} \quad , \quad i > 1$$

dengan e_i gandaan pensifar ξ_i.

Dengan menggunakan Lema Hensel, Chalk dan Smith (1982) memperolehi hasil yang berbentuk sama dengan $\delta =$ maks $ord_p f_i$ dengan f_i pekali Taylor

$$\frac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i!}$$

pada pensifar-pensifar yang berlainan ξ_i.

Loxton dan Smith (1982) pula menunjukkan bahawa bagi $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$

$$N(\underline{f};p^{\alpha}) \leq \begin{cases} p^{n\alpha} & jika \quad \alpha \leq 2\delta \\ (Darjh\, \underline{f})p^{\alpha} & jika \quad \alpha > 2\delta \end{cases}$$

dengan $\delta = ord_p \Delta(\underline{f})$ dengan $\Delta(\underline{f})$ menandakan pembezalayan $\underline{f}$.

Mohd Atan dan Loxton (1986) memperkembangkan idea poligon Newton dalam kes p-adic dalam dua pembolehubah dan dikenali sebagai Kaedah Polihedron Newton. Kaedah ini telah digunakan oleh para pengkaji diantaranya Mohd Atan (1986) , Abdullah (1992) , Chan (1997) dan Heng (1999). Berikut adalah diantara keputusan yang telah diperolehi untuk mendapatkan penganggaran hasil tambah dengan menggunakan kaedah polihedron Newton.

Katakan A perwakilan matriks bagi polinomial linear $\underline{f}$ dengan pekali dalam gelanggang p-adic Z_p dan $\alpha > 0$, Mohd Atan (1988) menunjukkan bahawa

$$N\left(f_x, f_y; p^\alpha\right) \leq \begin{cases} p^{2\alpha} & jika \quad \alpha \leq \delta \\ p^{(n-r)\alpha + r\delta} & jika \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

dengan δ minimum peringkat p-adic bagi $r \times r$ submatrik tak singular bagi A. Beliau juga menunjukkan kes khusus iaitu apabila $n = 2$ maka

$$N\left(f_x, f_y; p^\alpha\right) \leq \begin{cases} p^{2\alpha} & jika \quad \alpha \leq \delta \\ p^{2\delta} & jika \quad \alpha > \delta \end{cases}$$

dengan f dan g polinomial linear dalam $Z_p[x,y]$ dengan $\alpha > 0$ dan $\delta = ord_p J_{fg}$, iaitu peringkat p-adic bagi Jacobian f dan g .

Seterusnya Mohd Atan (1988) mengkaji polinomial $\underline{f} = (f_x, f_y)$ dengan f_x, f_y pembezaan separa terhadap x dan y bagi polinomial