UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

PEMETAKAN PROGRESIF SUATU SISTEM PERSAMAAN PEMBEZAAN BIASA DENGAN KAEDAH MULTILANGKAH

SALMAN BIN MAT BAOK

FSAS 1995 8

PEMETAKAN PROGRESIF SUATU SISTEM PERSAMAAN PEMBEZAAN BIASA DENGAN KAEDAH MULTILANGKAH

Oleh

SAIMAN BIN MAT BAOK

Disertasi Yang dikemukakan Sebagai Memenuhi Syarat
Untuk Mendapatkan Ijazah Doktor Falsafah
Di Fakulti Sains Dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Pertanian Malaysia

Oktober 1995

Semoga
Allah SWT
meredhai
kehidupan dua orang tuaku
Haji Ahmad dan Hajjah Rosiah
yang masih
tinggal jauh dari kota

Kasih dan sayang buat keluargaku
Latipah A Hamid
Ilyani
Amzari
Syuhairah
Khairunnisa
Muhamad Zuhaili

PENGHARGAAN

Penulis mengucapkan terima kasih yang tidak terhingga kepada Yang Berbahagia Tuan Timbalan Naib Canselor (Akademik) Universiti Pertanian Malaysia yang juga Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan iaitu Professor Dr. Mohammed bin Suleiman di atas segala jenis bantuan, bimbingan, dorongan, dan apa sahaja yang berkait dengan kursus dari awal hingga selesai.

Begitu juga ucapan terima kasih kepada ahli-ahli jawatan kuasa penyeliaan yang lain iaitu Prof. Madya Dr. Bachok bin Taib, Prof. Madya Dr. Malik bin Abu Hassan, dan Prof. Madya Dr. Kamil Ariffin bin Mohd. Atan.

Tidak lupa juga diucapkan terima kasih kepada Prof. Madya Dr. Harun bin Budin, Ketua Jabatan Matematik di atas kerjasama yang jabatan berikan. Kepada pihak Universiti Pertanian Malaysia juga penulis terhutang budi atas segala bantuan dan kewangan.

Akhirnya kepada keluarga tersayang yang dengan penuh kesabarannya menanti tamatnya kursus yang lama ini penulis mendoakan semoga Allah SWT mengampuni dosa dan meredhai hidup mereka. Amin.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

PPB	Persamaan Pembezaan Biasa
FBB	Formulasi Beza Ke Belakang
ODEs	Ordinary Differential Equations
BDF	Backward Difference Formulation
Ny(λ)	Bahagian Nyata Bagi λ
Kh(λ)	Bahagian Khayalan Bagi λ
Maks	Maksimum
min	minimum
R^m	Ruang Kartesan Berdimensi m
R^{mxm}	Set bagi matriks berdimensi mxm
$R(NB)^m$	Dalam kaedah peramal-pembetul peramal (R) digunakan sekali sementara pembetul (B) digunakan m kali. N menandakan menilai menggunakan data yang diperolehi sebelumnya.
RNBN	Ramal-Nilai-Betul-Nilai
TOL	Tolerance
pen(Λ)	penentu bagi matriks Λ
SUPUK	Saiz Langkah Berubah Peringkat Berubah Komponen Demi Komponen
SMPUK	Saiz Langkah Malar Peringkat Berubah Komponen Demi Komponen

Abstrak disertasi yang dikemukakan kepada Senat Universiti Pertanian Malaysia sebagai memenuhi syarat bagi Ijazah Doktor Falsafah.

PEMETAKAN PROGRESIF SUATU SISTEM PERSAMAAN PEMBEZAAN BIASA DENGAN KAEDAH MULTILANGKAH

OLEH

SAIMAN BIN MAT BAOK

OKTOBER 1995

Pengerusi : Professor Dr. Muhammed bin Suleiman

Fakulti : Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar

Suatu sistem persamaan pembezaan biasa (PPB) secara praktiknya mengandungi persamaan jenis kaku dan juga tak kaku. Telah difahamkan juga bahawa untuk menangani jenis persamaan pembezaan itu kaedah Adams dan FBB (Formulasi Beza Ke Belakang) masing-masing digunakan untuk menyelesaikan jenis tak kaku dan kaku. Kaedah Adams sesuai untuk masalah tak kaku kerana syarat kestabilan relatif yang baik dan ralat pangkasan yang kecil. Sementara untuk masalah kaku kaedah FBB lebih sesuai kerana kaedah ini mempunyai rantau kestabilan mutlak yang luas iaitu hampir separuh kiri satah $h\lambda$ dengan λ adalah nilai eigen bagi Jakobian sistem itu.

Dalam menyelesaikan suatu sistem persamaan pembezaan yang mengandungi dua jenis persamaan itu tugas pertama sebelum pemetakan adalah mengenalpasti persamaan-persamaan yang kaku dan kemudian memasukkan persamaan itu ke dalam subsistem kaku. Dalam kaedah pemetakan yang digunakan dalam kajian ini proses yang

digunakan dalam pemetakan itu adalah secara progresif yang bermakna dilakukan seiring dengan penyelesaian. Kriteria yang digunakan untuk mengenalpasti kekakuan adalah ketaktumpuan lelaran dalam penyelesaian sesuatu persamaan itu. Bab IV akan menjelaskan proses pemetakan ini ke atas sistem yang kecil. Dalam proses pemetakan dalam kajian ini juga menggunakan teknik tidak menetapkan peringkat untuk setiap persamaan dalam sistem yang dipetakkan atau disebut mengubah peringkat secara komponen. Sebab-sebab melakukan demikian dijelaskan dalam Bab III.

Dalam kes penyelesaian suatu sistem PPB dengan menggunakan kaedah Adams dengan lelaran titik tetap, penumpuan dibatasi oleh $|h\lambda^*| < k$ dengan $k = O(1)$, dan λ^* adalah nilai eigen terbesar bagi Jakobian sistem itu. Di sini dalam teknik untuk pemetakan progresif bagi PPB kaku dengan anggapan nilai-nilai eigen berbeza nilainya, hubungan seperti itu wujud, cuma λ^* sekarang adalah nilai eigen yang paling dominan yang masih ada pengaruhnya ke atas penumpuan lelaran.

Bab VI menjustifikasikan proses pemetakan suatu sistem umum $y' = f(x,y)$ dengan membina model linear $y' = \hat{A}y$ yang mempunyai nilai eigen $\hat{\lambda}^*$ bagi magnitud terbesarnya menghampiri nilai eigen taktertindas λ^* paling dominan bagi Jakobian $J = \frac{\partial f}{\partial y}$. Di sini nilai eigen 'taktertindas' mengimplikasikan nilai eigen paling dominan selepas pemetakan iaitu menghadkan penumpuan apabila saiz langkah membesar. Jadi kita buktikan seterusnya bahawa pada titik penumpuan, prosess pemetakan secara automatik menindas kesan λ^* dan $\hat{\lambda}^*$ dan membenarkan h membesar, yang demikian itu menjustifikasikan teknik yang dicadangkan.

Abstract of thesis submitted to the Senate of Universiti Pertanian Malaysia in fulfilment of the requirement for the degree of Doctor of Philosophy

PROGRESSIVE PARTITIONING OF A SYSTEM OF ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATIONS BY MULTISTEP METHODS

BY

SAIMAN BIN MAT BAOK

OCTOBER 1995

Chairman : Professor Dr. Mohammed bin Suleiman

Faculty : Faculty of Science and Environmental Studies

A system of ordinary differential equations (ODEs) practically consists of subsystem of stiff and non-stiff equations. It is known that to handle such equations Adams and Backward Difference Formulation (BDF) Methods are used to solve respectively non-stiff and stiff equations respectively. Adams method is more suitable for non-stiff problems since its relative stability conditions are good and has small truncation errors. On the contrary for the stiff problems BDF methods are preferable since it has large absolute stability region which is nearly equal to the left half of the $h\lambda$ plane, where λ is the eigen value of the Jacobean of the system.

The first task in solving this system is to identify stiff equations and putting them in the stiff subsystem. In this study the partitioning process is carried out progressively in line with the process of finding the solution. The criteria used in the stiff identification is the nonconvergence of the iteration

for the solution of the equation. Chapter IV will illustrate the partitioning process of a small system. Also in this partitioning process the order is varied componentwise. The reasons for doing this will be given in Chapter III.

In the case of solving an ODE system using Adams method with fixed point iteration, the convergence is restricted by $|h\lambda^*| < k$ where $k = O(1)$, and λ^* is the largest eigenvalue of the Jacobean of the system. In this case, the technique proposed for the progressive partitioning of stiff ODEs with the assumption that the eigenvalues are well separated, such a relation exist, where λ^* is now the most dominant eigenvalue which effects on the convergence of the iteration process.

Chapter VI deals with justifying the partitioning process on a general system $y' = f(x,y)$ by creating linear model $y' = \hat{\Lambda}y$ whose eigenvalue $\hat{\lambda}^*$ of largest magnitude approximate the most dominant unsuppressed eigenvalue λ^* of the Jacobean $J = \frac{\partial f}{\partial y}$. Here 'unsuppressed' eigenvalue implies the most dominant eigenvalue after partitioning that is restricting convergence as the stepsize increases. At the point of convergence, the partitioning process will automatically suppress the effect of λ^* and $\hat{\lambda}^*$ and allows for h to increase, thus justifying the technique proposed.

BAB I

PENDAHULUAN

Banyak masalah dalam kejuruteraan dan sains boleh ditulis dalam sistem persamaan pembezaan. Masalah pembengkokan kepingan logam yang dipegang di kedua hujungnya, masalah yang berkaitan dengan aliran haba, masalah berkaitan dengan kinetik kimia, masalah berkaitan dengan kawalan adalah contoh masalah yang boleh diperihalkan melalui sistem persamaan pembezaan. Walaupun kebanyakan sistem itu tidak boleh diselesaikan secara analitik tetapi hampiran kepada penyelesaiannya boleh didapati secara berangka. Umumnya suatu sistem persamaan pembezaan seperti itu boleh dikelaskan kepada dua jenis persamaan pembezaan iaitu jenis kaku dan jenis tak kaku. Biasanya suatu sistem yang dikelaskan sebagai kaku terdapat subsistem yang tak kaku.

Tumpuan para pengkaji masa dahulu ialah dalam menggunakan rumus jenis Runge-Kutta dan jenis multilangkah untuk menyelesaikan kedua-dua jenis persamaan itu, lihat Hall and Watt (1976). Di samping itu pengkaji mesti memilih rumus yang sesuai dengan jenis persamaan pembezaan itu iaitu jenis kaku atau tak kaku. Pemilihan yang tepat biasanya sukar dilakukan kerana ia boleh dipengaruhi oleh minat atau kegemaran pengkaji.

Oleh itu tugas utama sekarang ialah memetak sistem itu kepada dua iaitu subsistem kaku dan subsistem tak kaku. Kebanyakan kaedah yang digunakan kepada sistem seperti ini adalah kaedah tersirat ke atas subsistem kaku dan kaedah tak tersirat ke atas subsistem tak kaku, Aiken (1985).

Kaedah Adams digunakan untuk subsistem tak kaku dan kaedah formulasi beza ke belakang (FBB) untuk subsistem kaku. Pemetakan dilakukan secara progresif atau seiring dengan proses penyelesaian iaitu apabila berlakunya ketaktumpuan dalam lelaran. Dalam kajian ini kod tunggal yang digunakan oleh Hall dan Suleiman (1985) juga digunakan di sini.

Bab 1 dalam tesis ini memberikan pendahuluan kepada sistem persamaan pembezaan secara am dan penyelesaiannya. Dua teknik penyelesaian iaitu menggunakan beza ke belakang untuk kes saiz langkah malar dan beza terbahagi untuk kes saiz langkah berubah dijelaskan. Teknik kedua ini digunakan dalam penyelesaian PPB dalam kajian ini. Hall dan Suleiman (1985) juga menggunakan teknik beza terbahagi dalam membina kod yang boleh memetakkan suatu sistem kepada subsistem kaku dan tak kaku secara automatik dan prosesnya berlaku secara progressif. Di sinilah letaknya kelebihan kod penyelesaian ini dibandingkan dengan sesetengah kaedah penyelesaian oleh pengkaji yang lain. Huraian untuk pemetakan sistem seperti ini akan diberikan dalam bahagian akhir bab ini.

Bab II membuktikan bahawa implementasi praktikal kaedah Formulasi Beza Ke Belakang (FBB) tidak mengekang kestabilan mutlaknya. Hal ini penting kerana kestabilan mutlak yang luas adalah ciri utama dalam penyelesaian PPB dengan kaedah FBB. Pembuktian ini belum temui dalam mana-mana penulisan terdahulu.

Bab III memberikan sebab-sebab mengapa peringkat setiap komponen perlu berubah berbanding dengan mengekalkan peringkat untuk semua komponen terlibat. Strategi oleh Shampine dan Gordon (1975) mengekalkan peringkat sama untuk semua komponen boleh menambah kerja pengiraan kerana terpaksa menambah sebutan untuk peramal dan beza terbahagi. Mengubah peringkat ini juga sesuai dengan fakta bahawa sesuatu persamaan itu menjadi kaku pada peringkat rendah iaitu apabila berlaku ketidakstabilan dalam penyelesaian. Maka mana-mana persamaan yang tak kaku boleh memilih peringkat yang lebih tinggi daripada 4. Satu sebab utama mengubah peringkat dalam kaedah multi langkah ini juga adalah untuk membina suatu kod yang dikenal sebagai kod tak peka jenis iaitu kod yang dapat disesuaikan dengan pertukaran nilai eigen. Seterusnya dalam Bab III ini diterangkan kewujudan rantau kestabilan mutlak untuk kaedah multi langkah dengan mengubah peringkat.

Bab IV menerangkan proses pemetakan suatu sistem PPB dengan menggunakan kriteria ketaktumpuan lelaran. Peranan nilai eigen yang dominan juga mempunyai kaitan yang kuat yang mempengaruhi ketaktumpuan dan seterusnya membolehkan pemetakan dilakukan. Walaupun dalam bab ini perbincangan hanya dilakukan untuk kes sistem PPB yang melibatkan dua dan tiga persamaan sahaja tetapi tanpa diragui kaedah ini boleh diitlakkan kepada sistem yang lebih besar.

Bab V menerangkan terdapat kaitan antara ketaktumpuan dengan pengaruh nilai eigen yang paling dominan. Dijelaskan dalam bab ini melalui penggunaan minor prinsipal bahawa ketaktumpuan yang berlaku dalam Bab IV itu adalah disebabkan oleh nilai eigen yang dominan ini. Kaitan antara nilai eigen dan ketaktumpuan ini juga terdapat dalam kaedah pemetakan oleh Enright dan Kamel (1979) dan telah dianalisis kaedah itu kemudiannya oleh Higham (1989).

Bab VI memuatkan semula kaedah pemetakan secara progresif yang telah dijelaskan dalam Bab IV tetapi diitlakkan kepada sistem yang lebih umum. Teori pemetakan yang perkukuhkan dalam bab ini telah meyakinkan bahawa pemetakan dalam Bab IV adalah wajar. Akhir sekali dalam Bab VII penulis mencadangkan agar kajian ini diperluaskan kepada sistem PPB peringkat yang lebih tinggi.

Sistem Persamaan Pembezaan Biasa Peringkat Pertama

Suatu masalah nilai awal suatu sistem mengandungi m persamaan pembezaan biasa (PPB) peringkat pertama diberikan sebagaimana berikut:

$$y' = f(x,y) \qquad y(a) = \eta \qquad y, f \in \mathbb{R}^m \qquad [1.1]$$

dengan $y = [y_1, y_2, \ldots, y_m]^T$,

$f = [f_1, f_2, \ldots, f_m]^T$

dan $\eta = [\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_m]^T$.

Penyelesaian berangka yang berdasarkan kepada kaedah langkah demi langkah bermula dari $y(a) = \eta$ menghasilkan suatu hampiran y_i untuk $y(x_i)$, dengan $x_i \in [a,b]$. Kod penyelesaian yang digunakan biasanya akan memilih saiz langkah h_{i+1} selepas langkah ke i dalam proses penyelesaian supaya penyelesaian yang diperolehi di titik $x_{i+1} = x_i + h_{i+1}$ memenuhi keperluan kejituan atau seberapa hampir yang mungkin kepada penyelesaian sebenar.

Walau bagaimanapun, sebelum proses penyelesaian bermula pada lazimnya andaian awal bagi $f(x,y)$ dibuat iaitu bahawa $f(x,y)$ memenuhi syarat Lipschitz. Dalam kes ini untuk setiap i, $f_i(x,y)$ memenuhi syarat-syarat berikut,

a. $f_i(x,y)$ tertakrif dan selanjar dalam $a \le x \le b$, a, b terhingga dan $\|y\| < \infty$

b. wujud suatu pemalar L sedemikian hingga untuk $x \in [a,b]$ dan sebarang y dan y*

$$|f_i(x,y) - f_i(x,y^*)| \le L \, \|y - y^*\|.$$

Syarat-syarat itu adalah syarat perlu untuk masalah [1.1] mempunyai penyelesaian iaitu wujud suatu penyelesaian $y_i(x)$ unik untuk setiap i dengan sifat-sifat berikut:

a. $y_i(x)$ selanjar dan terbezakan untuk $x \in [a,b]$

b. $y_i(x) = f_i(x,y)$ untuk $x \in [a,b]$

c. $y_i(a) = \eta_i$

Coppel (1965) memberikan pembuktian kepada keputusan ini.

Jadi syarat Lipschitz itu menjamin kewujudan dan keunikan penyelesaian y(x) bagi [1.1]. Nilai L yang dikenal sebagai pemalar Lipschitz mempunyai peranan satu daripadanya menentukan jenis persamaan pembezaan itu dan seterusnya kepada pemilihan kaedah penyelesaian yang sesuai. Shampine (1980) menyatakan dalam situasi dengan L(b-a) tidak besar, kaedah Runge-Kutta dan Adams adalah sesuai untuk masalah ini. Tetapi sekiranya L(b-a) besar keadaannya berbeza, dengan masalah matematik harus dibatasi untuk membolehkan kaedah langkah demi langkah itu dapat digunakan. Dalam keadaan tertentu pula kaedah seperti Adams mengalami berbagai batasan yang teruk sehingga penggunaan kaedah itu menjadi tidak sesuai. Keadaan inilah yang disebut kaku. Oleh itu sistem kaku kadang-kadang dikatakan sebagai sistem yang mempunyai pemalar Lipschitz yang besar (Lambert, 1973).

Berbagai pandangan telah diberikan oleh pengkaji mengenai takrif kekakuan suatu sistem persamaan pembezaan biasa ini. Pandangan-pandangan ini timbul khusus untuk memberi jawapan kepada soal kenapa suatu persamaan itu kaku. Mereka bersetuju bahawa suatu persamaan kaku itu adalah persamaan yang tidak boleh diselesaikan dengan kaedah tersirat. Maka dari situ terdapat berbagai kriteria kekakuan diberikan dalam berbagai takrif kekakuan suatu masalah. Higham dan Trefethen (1993) memberikan pandangannya bahawa ciri kekakuan menjadi lebih tepat jika nilai eigen bagi Jakobian diganti dengan pseudospektrum. Sebagai kemudahan dan keseragaman takrif kekakuan dalam tesis ini maka kita ambil takrif yang diberikan oleh Lambert (1973) secara tepat, dan sebelum itu kita perlukan takrif nilai eigen sistem berkenaan. Kita takrifkan nilai eigen λ_i $i = 1, 2, \ldots, s$ bagi sistem [1.1] di titik (x,y) sebagai nilai eigen bagi matriks Jakobian, $J = (\frac{\partial f}{\partial y})$, dinilaikan di titik (x,y). Maka takrif kaku suatu sistem persamaan itu sebagaimana yang diberikan oleh Lambert (1973) adalah seperti berikut:

Takrif:

Sistem PPB [1.1] disebut sebagai kaku jika

i. $Ny(\lambda_i) < 0, \quad i = 1, \ldots, s,$

ii. $\text{maks}_i |Ny(\lambda_i)| \gg \min_i |Ny(\lambda_i)|$ dengan λ_i adalah nilai eigen bagi Jakobian sistem itu, J.

Nisbah

$$\left[\max_{i=1,2,\ldots,n} |Ny(\lambda_i)|\right] : \left[\min_{i=1,2,\ldots,n} |Ny(\lambda_i)|\right]$$

disebut nisbah kekakuan.

Telah disadari oleh para penyelidik bahawa pada kebiasaannya suatu sistem PPB itu terdiri daripada campuran persamaan yang kaku dan yang tak kaku. Setiap jenis persamaan itu pula harus diselesaikan dengan menggunakan kaedah yang berlainan yang sesuai dan memberikan hampiran yang baik. Dalam kajian ini, kita gunakan kaedah multilangkah Adams RNBN (Ramal-Nilai -Betul-Nilai) untuk persamaan jenis tak kaku dan kaedah multi langkah FBB (Formulasi Beza Ke Belakang) untuk persamaan jenis kaku.

Kaedah Penyelesaian

Kita pertimbangkan dahulu kes PPB tak kaku dan diselesaikan dengan kaedah Adams. Jika kita kamirkan persamaan $y' = f(x,y)$ kita dapat

$$y(x_{n+1}) = y(x_n) + \int_{x_n}^{x_{n+1}} f(x,y)dx \qquad [1.2]$$

Nilai $y(x_{n+1})$ ini boleh dihampirkan dengan menggantikan f dalam kamiran dengan polinomial penentudalam $P_{k,n}(x)$ yang mempunyai darjah k-1 yang menentudalam f di sebanyak k titik yang sama jarak antara satu titik dengan titik berikutnya iaitu $x_n, x_{n-1}, \ldots, x_{n-k+1}$. Dalam sebutan beza ke belakang

$$P_{k,n}(x) = f_n + \frac{(x-x_n)}{h}\nabla f_n + \ldots$$

$$+ \frac{(x-x_n)\ldots(x-x_{n-k+2})}{h^{k-1}(k-1)!}\nabla^{k-1} f_n \qquad [1.3]$$

dengan h adalah jarak x_{n-i} dengan x_{n-i-1}, $0 \le i \le k-1$.

Oleh itu [1.2] sekarang menjadi

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P_{k,n}(t)\,dt \qquad [1.4]$$

Dengan memasukkan [1.3] ke dalam [1.4], dan seterusnya dikamirkan kita dapat

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{k} \beta_{i-1} \nabla^{i-1} f_n, \qquad [1.5]$$

dengan menggunakan gantian $s = (t-x_n)/h$,

$$\beta_0 = 1$$

$$\beta_i = \frac{1}{i!h} \int_{x_n}^{x_{n+1}} \frac{(t-x_n)(t-x_{n-1})\ldots(t-x_{n+1-i})}{h^{i-1}}\,dt$$

$$= \frac{1}{i!} \int_0^1 s(s+1)\ldots(s+i-1)\,ds \qquad i \geq 1.$$

[1.5] dikenal sebagai rumus (tak tersirat) Adams-Bashforth k langkah dan dalam masalah kita sekarang dipakai sebagai peramal. Untuk membezakan dengan y yang biasa, kita tulis untuk y_{n+1} dalam rumus Adams-Bashforth sebagai p_{n+1}.

Pembetul dalam kaedah ini adalah rumus (tersirat) Adams-Moulton k langkah iaitu

$$y_{n+1} = y_n + \int_{x_n}^{x_{n+1}} P^*_{k,n}(t)\,dt \qquad [1.6]$$

$P^*_{k,n}$ menentudalam f di titik-titik $(x_{n+1}, f_{n+1}), \ldots, (x_{n-k+1}, f_{n-k+1})$.

$$P^*_{k,n}(x_{n+1-j}) = f_{n+1-j} \qquad j = 1, \ldots, k-1$$

$$P^*_{k,n}(x_{n+1}) = f(x_{n+1}, p_{n+1})$$

Seperti juga dengan Adams-Bashforth [1.6] boleh dikamirkan seterusnya dengan menggunakan polinomial tersebut untuk mendapat rumus Adams-Moulton

$$y_{n+1} = y_n + h \sum_{i=1}^{k} \beta^*_{i-1} \nabla^{i-1} f_{n+1} \qquad [1.7]$$

dengan

$$\beta^*_0 = 1$$

$$\beta^*_i = \frac{1}{i!} \int_0^1 (s-1)(s)\ldots(s+i-2)ds \quad i \geq 1 \qquad [1.8]$$

Henrici (1962) membuktikan bahawa $\beta_k = \sum_{i=0}^{k} \beta_i^*$. Satu lagi hubungan istimewa yang mengaitkan antara β^*_i dengan β_i ialah

$$\beta_i - \beta_{i-1} = \frac{1}{(i-1)!} \int_0^1 s(s+1)\ldots(s+i-2)\left[\frac{(s+i-1)}{i} - 1\right]ds$$

$$= \frac{1}{i!} \int_0^1 (s-1)(s)\ldots(s+i-2)ds$$

$$= \beta^*_i$$

Kita gunakan hubungan ini untuk mendapatkan rumus untuk pengiraan. Untuk tujuan pengiraan rumus [1.7] boleh diringkaskan dengan mengambil faedah daripada pengiraan p_{n+1}. Daripada [1.5] dan [1.7] kita dapati untuk pembetul dengan peringkat k

$$y_{n+1}(k) - p_{n+1} = h \sum_{i=1}^{k} \beta^*_{i-1} \nabla^{i-1} f_{n+1} - h \sum_{i=1}^{k} \beta_{i-1} \nabla^{i-1} f_n$$

$$= h \sum_{i=1}^{k} [\beta^*_{i-1} - \beta_{i-1}] \nabla^{i-1} f_{n+1} +$$

$$h \sum_{i=1}^{k} \beta_{i-1} [\nabla^{i-1} f_{n+1} - \nabla^{i-1} f_n]$$

$$= - h \sum_{i=2}^{k} \beta_{i-2} \nabla^{i-1} f_{n+1} +$$

$$h \sum_{i=1}^{k} \beta_{i-1} \nabla^{i} f_{n+1}$$

$$= h\beta_{k-1} \nabla^{k} f_{n+1}$$

Dari [1.7] untuk pembetul dengan peringkat k+1 kita dapati

$$\begin{aligned} y_{n+1}(k+1) &= y_{n+1}(k) + h\, \beta^{*}_{k} \nabla^{k} f_{n+1} \\ &= p_{n+1} + h\beta_{k-1} \nabla^{k} f_{n+1} + h\beta^{*}_{k} f_{n+1} \\ &= p_{n+1} + h\beta_{k} \nabla^{k} f_{n+1} \end{aligned}$$

Jadi jika peramal dan pembetul kedua-duanya mempunyai peringkat k, maka

$$y_{n+1} = p_{n+1} + h\beta_{k-1} \nabla^{k} f_{n+1} \qquad [1.9]$$

Jika peramal mempunyai peringkat k dan pembetul mempunyai peringkat k+1, maka

$$y_{n+1} = p_{n+1} + h\beta_{k} \nabla^{k} f_{n+1} \qquad [1.10]$$

Oleh itu rumus penyelesaian kaedah Adams kepada persamaan jenis tak kaku iaitu persamaan pertama adalah

$$y_{n+1} = p_{n+1} + h\beta_{k} \nabla^{k} f_{n+1} \qquad [1.11]$$

$$y'_{n+1} = p'_{n+1} + \nabla^{k} f_{n+1}$$

dengan p, p′ menunjukkan nilai peramal menggantikan nilai y, y′ dalam rumus Adams-Bashforth di atas. β_k adalah pekali bersekutu