UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOFANTUS LINEAR DENGAN ANGGARAN EKSPLISIT HASIL TAMBAH EKSPONEN

NOR WAHIDA DERAMAN.

IPM 2007 1

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOFANTUS LINEAR DENGAN ANGGARAN EKSPLISIT HASIL TAMBAH EKSPONEN

Oleh

NOR WAHIDA DERAMAN

Tesis Ini Dikemukakan Kepada Sekolah Pengajian Siswazah, Universiti Putra Malaysia, Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah Master Sains

Mac 2007

Salam kasih dan sayang buat

Hj. Deraman B. Yusoff,
Hjh. Hamidah Bt. Mamat,

Fadzlirahimi B. Ismail

Dan

Anis Sulwani Bt. Fadzlirahimi

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains

PENYELESAIAN PERSAMAAN DIOFANTUS LINEAR DENGAN ANGGARAN EKSPLISIT HASIL TAMBAH EKSPONEN

Oleh

NOR WAHIDA DERAMAN

Mac 2007

Pengerusi : Profesor Dato' Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD

Institut : Penyelidikan Matematik

Katakan $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots , x_n)$ suatu vektor dalam ruang Z^n dengan Z menandakan gelanggang integer dan katakan q integer positif dan f suatu polinomial dalam $\underline{x}$ berpekali unsur dalam Z. Hasil tambah eksponen yang dihubungkan dengan f ditakrifkan sebagai, $S(f;q) = \sum e^{\frac{2\pi i f(\underline{x})}{q}}$, dengan $\underline{x}$ mengambil nilai dalam sistem reja terkecil modulo q.

Seperti yang telah ditunjukkan sebelum ini, kebanyakan anggaran adalah bersandar kepada suatu nilai malar yang dihubungkan dengan polinomial yang berkaitan secara tersirat. Penyelidikan ini tertumpu kepada mencari anggaran hasil tambah eksponen, $S(f;q)$ dengan $f(\underline{x})$ polinomial kuadratik dua, tiga dan empat pembolehubah berpekali dalam gelanggang integer p-

adic, Z_p. Pendekatan yang dilakukan ialah dengan meneliti dan menguji set penyelesaian Persamaan Diofantus Linear yang dihubungkan dengan terbitan separa $f(\underline{x})$. Daripada kajian yang kami lakukan, keputusan yang diperolehi adalah seperti berikut:

Pertama, katakan, $f(x,y)=ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + t$. Biarkan, α suatu integer positif, $\theta = \left[\frac{\alpha}{2}\right]$ dan $u_1 = \min\{ord_p\,(4ac\text{-}b^2),\theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \le \min\{\text{ord}_p\, 2a, \text{ord}_p\, b\}$ dan $k \le \min\{\text{ord}_p\, b, \text{ord}_p\, 2c\}$. Jika $N(f(x,y),\ p^{\theta}) \le p^{u_1}$, maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y)$ ialah,

$$\left|S\left(f;p^{\alpha}\right)\right| \le p^{2(\alpha-\theta)+u_1}.$$

Kedua, katakan, $f(x,y,z)=a_1x^2+a_2y^2+a_3z^2+b_1xy+b_2yz+b_3xz+c_1x+c_2y+c_3z+d$. Biarkan, $(2a_1b_2-b_1b_3)=a_{11}$, $(b_1b_2-2a_2b_3)=a_{12}$, $(2a_3b_1-b_2b_3)=a_{21}$, $(4a_2a_3-b_2^{\,2})=a_{22}$. Katakan, $u_2 \le \min\ \{\text{ord}_p\, 2a_3, \text{ord}_p\, b_2, \text{ord}_p\, b_3\}$, $u_1 = \min\{\text{ord}_p\, (a_{11}a_{22}\text{-}a_{12}a_{21}),\theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \le \min\{\text{ord}_p\, a_{11}, \text{ord}_p\, a_{21}\}$ dan $k \le \min\{\text{ord}_p\, a_{12}, \text{ord}_p\, a_{22}\}$. Jika $N(f(x,y,z),\ p^{\theta}) \le p^{u_1+u_2}$, maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y,z)$ ialah,

$$\left|S\left(f;p^{\alpha}\right)\right| \le p^{3(\alpha-\theta)+u_1+u_2}.$$

Ketiga, Katakan, $f(x,y,z,t) = a_1x + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4t^2 + b_1xy + b_2xz + b_3xt + b_4yz + b_5yt + b_6zt + c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + e$. Biarkan, $(2a_1b_5 - b_1b_3) = c_{11}$, $(b_1b_5 - 2a_2b_3) = c_{12}$, $(b_2b_5 - b_3b_4) = c_{13}$, $(b_1b_6 - b_2b_5) = c_{21}$, $(2a_2b_6 - b_4b_5) = c_{22}$, $(b_4b_6 - 2a_3b_5) = c_{23}$, $(2a_4b_2 - b_3b_6) = c_{31}$, $(2a_4b_4 - b_5b_6) = c_{32}$ dan, $(4a_3a_4 - b_6^2) = c_{33}$. Katakan, $(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) = a_{11}$, $(c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) = a_{12}$, $(c_{21}c_{33} - c_{31}c_{23}) = a_{21}$, $(c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}) = a_{22}$. Biarkan, $u_3 \leq \min\{\mathrm{ord}_p 2a_4, \mathrm{ord}_p\, b_3, \mathrm{ord}_p\, b_5, \mathrm{ord}_p\, b_6\}$, $u_2 \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, c_{13}, \mathrm{ord}_p\, c_{23}, \mathrm{ord}_p\, c_{33}\}$ dan $u_1 = \min\{\mathrm{ord}_p\, (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$, dengan $l \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, a_{11}, \mathrm{ord}_p\, a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, a_{12}, \mathrm{ord}_p\, a_{22}\}$. Jika $N(f(x,y,z,t),p^\theta) \leq p^{u_1+u_2+u_3}$, maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y,z,t)$ ialah,

$$\left|S(f;p^\alpha)\right| \leq p^{4(\alpha-\theta)+u_1+u_2+u_3}.$$

Abstract of thesis presented to Senate of Universiti Putra Malaysia in fulfilment of the requirement for the degree of Master of Science

SOLUTION OF LINEAR DIOFANTUS EQUATION AND EXPLICIT ESTIMATION OF EXPONENTIAL SUM

By

NOR WAHIDA DERAMAN

March 2007

Chairman : Professor Dato' Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD

Institute : Mathematical Research

Let $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ be a vector in a space Z^n with Z the ring of integers and let q be a positive integer and f a polynomial in $\underline{x}$ with coefficients in Z. The exponential sum associated with f is defined as, $S(f;q) = \sum e^{\frac{2\pi i f(\underline{x})}{q}}$,where the sum is taken over a set of least residues modulo q.

As has been shown previously, most of these estimates depend on a constant value that is related to the polynomial implicitly. This research concentrates on finding estimates to the exponential sum, $S(f;q)$ where $f(\underline{x})$ are two, three and four variables quadratic polynomials with coefficients in the ring of p-adic integers, Z_p. The approach is by observing and examining

the sets of solutions of Linear Diophantine Equation associated with partial derivatives of $f(\underline{x})$. In our work, we found that:

First, let, $f(x,y)=ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + t$. Let α is the positive integer, $\theta = \left[\frac{\alpha}{2}\right]$ and $u_1 = \min\{ord_p\,(4ac-b^2),\theta\}$ or $u_1 = l+k$ with, $l \leq \min\{\text{ord}_p\, 2a, \text{ord}_p\, b\}$ and $k \leq \min\{\text{ord}_p\, b, \text{ord}_p\, 2c\}$. If $N(f(x,y), p^\theta) \leq p^{u_1}$, then the estimation of the exponential sum associated with polynomial $f(x,y)$ as follows:

$$\left|S\left(f;p^\alpha\right)\right| \leq p^{2(\alpha-\theta)+u_1}.$$

Second, let, $f(x,y,z)=a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3z + d$. Let, $(2a_1b_2 - b_1b_3) = a_{11}$, $(b_1b_2 - 2a_2b_3) = a_{12}$, $(2a_3b_1 - b_2b_3) = a_{21}$, $\left(4a_2a_3 - b_2^{\,2}\right) = a_{22}$. Let, $u_2 \leq \min\{\text{ord}_p\, 2a_3, \text{ord}_p\, b_2, \text{ord}_p\, b_3\}$, $u_1 = \min\{\text{ord}_p\, (a_{11}a_{22}-a_{12}a_{21}),\theta\}$ or $u_1 = l+k$ with, $l \leq \min\{\text{ord}_p\, a_{11}, \text{ord}_p\, a_{21}\}$ and $k \leq \min\{\text{ord}_p\, a_{12}, \text{ord}_p\, a_{22}\}$. If $N(f(x,y,z), p^\theta) \leq p^{u_1+u_2}$, then the estimation of the exponential sum associated with polynomial $f(x,y,z)$ as follows:

$$\left|S\left(f;p^\alpha\right)\right| \leq p^{3(\alpha-\theta)+u_1+u_2}.$$

Third, let, $f(x,y,z,t) = a_1x + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4t^2 + b_1xy + b_2xz + b_3xt + b_4yz + b_5yt + b_6zt + c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + e$. Let, $(2a_1b_5 - b_1b_3) = c_{11}$, $(b_1b_5 - 2a_2b_3) = c_{12}$, $(b_2b_5 - b_3b_4) = c_{13}$, $(b_1b_6 - b_2b_5) = c_{21}$,

$(2a_2b_6 - b_4b_5) = c_{22}$, $(b_4b_6 - 2a_3b_5) = c_{23}$, $(2a_4b_2 - b_3b_6) = c_{31}$, $(2a_4b_4 - b_5b_6) = c_{32}$, $(4a_3a_4 - b_6^{\,2}) = c_{33}$. Let, $(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) = a_{11}$, $(c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) = a_{12}$, $(c_{21}c_{33} - c_{31}c_{23}) = a_{21}$, $(c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}) = a_{22}$. Let, $u_3 \leq \min\{\mathrm{ord}_p 2a_4, \mathrm{ord}_p\, b_3, \mathrm{ord}_p\, b_5, \mathrm{ord}_p\, b_6\}$, $u_2 \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, c_{13}, \mathrm{ord}_p\, c_{23}, \mathrm{ord}_p\, c_{33}\}$ and $u_1 = \min\{\mathrm{ord}_p\, (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \theta\}$ or $u_1 = l+k$, with $l \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, a_{11}, \mathrm{ord}_p\, a_{21}\}$ and $k \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, a_{12}, \mathrm{ord}_p\, a_{22}\}$. If $N(f(x,y,z,t), p^{\theta}) \leq p^{u_1+u_2+u_3}$, then the estimation of the exponential sum associated with polynomial $f(x,y,z,t)$ as follows:

$$\left|S(f; p^{\alpha})\right| \leq p^{4(\alpha-\theta)+u_1+u_2+u_3}.$$

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah yang Maha Pemurah lagi Maha Mengasihani. Kesyukuran yang tidak terhingga kehadrat Ilahi kerana dengan limpah kurnia-Nya dapat saya menyiapkan tesis ini.

Pertama sekali jutaan terima kasih diucapkan kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan iaitu Prof. Dato' Dr. Hj. Kamel Ariffin Bin Mohd Atan di atas segala kesabaran, sokongan, bantuan, dorongan dan bimbingan beliau dapat saya menyiapkan tesis ini.

Ribuan terima kasih juga diucapkan kepada Prof. Madya Dr. Mohamad Rushdan Bin Mohd Said dan Prof. Madya Dr. Bekbaev Ural Djumaevich kerana bantuan dan tunjukajar yang telah mereka berikan sepanjang saya menyelesaikan tesis ini.

Akhir kata, saya ingin merakamkan penghargaan buat ahli keluarga terutamanya ibu, ayah, suami dan anak kerana tidak jemu memberi dorongan dan semangat sehinggalah penulisan ini selesai.

JADUAL KANDUNGAN

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

p	Nombor Perdana
Z	Gelanggang Integer
Q	Medan Nombor Nisbah
Z_p	Gelanggang Integer p-adic
Q_p	Medan Nombor Nisbah p-adic
$\underline{x}$	n-rangkap pembolehubah $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, $n \geq 1$
$\underline{f}$	m-rangkap polinomial $(f_1, f_2, \ldots, f_m)$, $m \geq 1$
$\sum$	Hasil Tambah
$e_k(f(t))$	$e^{\frac{2\pi i f(t)}{k}}$
$S(f;q)$	Hasil Tambah Eksponen
$V(\underline{f};p^\alpha)$	Set $\{\underline{x} \bmod p^\alpha : \underline{f} \equiv 0 \bmod p^\alpha\}$
$N(\underline{f}; p^\alpha)$	Kekardinalan bagi Set $V(\underline{f};p^\alpha)$
$a \mid b$	a Membahagi b
$\lvert A \rvert$	Penentu atau bilangan unsur bagi Matriks A
A^{T}	Matriks Transposisi bagi Matriks A
mod	Modulo
diag	Pepenjuru (*diagonal*)
col	Lajur (*column*)
rank	Pangkat
gcd	Pembahagi Sepunya Terbesar
$\mathrm{ord}_p\, a$	Kuasa tertinggi p yang membahagi a.

BAB 1

PENGENALAN

1.1: Ringkasan Penyelidikan

Penyelidikan kami ditumpukan kepada masalah menentukan kekardinalan sistem persamaan separa yang dihubungkan dengan $f(\underline{x})$, polinomial kuadratik n-pembolehubah, dengan $n = 2$, 3 dan 4. Ini merupakan salah satu masalah yang telah dikaji oleh pengkaji-pengkaji terdahulu dalam usaha untuk mencari anggaran terbaik kepada kekardinalan ini, umpamanya Mohd. Atan (1989). Beliau telah menunjukkan bahawa, bagi sebarang polinomial kuadratik banyak pembolehubah, $f(\underline{x})$ dengan pekali dalam Z, nilai $\left|S(f;p^{\alpha})\right|$ bagi p perdana dan $\alpha > 0$ bergantung kepada $N(f;p^{\theta})$ dengan $\theta = \left[\frac{\alpha}{2}\right]$. Iaitu,

$$\left|S(f;p^{\alpha})\right| \leq p^{n(\alpha-\theta)}N(f;p^{\theta}) \tag{1.1}$$

dengan $N(f;p^{\theta})$ menandakan kekardinalan bagi $V(f;p^{\theta})$. Katakan $\theta > 0$ dan $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, n-rangkap polinomial dalam gelanggang integer p-adic $Z_p[\underline{x}]$ dengan $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$, kita pertimbangkan set

$$V(f;p^{\theta}) = \{\underline{x} \bmod p^{\theta}; \underline{f_x}(\underline{x}) \equiv 0 \bmod p^{\theta}\}. \tag{1.2}$$

Kajian yang telah kami jalankan adalah dengan memerhatikan kekardinalan, $N(f;p^{\theta})$ bagi sistem persamaan separa yang dihubungkan dengan polinomial kuadratik $f(\underline{x})$ dua, tiga dan empat pembolehubah.

Dalam Bab 2, kajian dimulakan dengan menyelesaikan sistem persamaan terbitan separa $f(x)$ dengan menggunakan kaedah penurunan matriks ke bentuk normal Smith. Penyelesaian diperolehi melalui perisian MAPLE9. Walaupun kaedah ini lebih mudah dan cepat, namun keputusan yang diperolehi kurang tepat dan penyelesaian bukan dalam bentuk $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Jadi, kajian diteruskan dengan menggunakan kaedah Cramer seperti yang diterangkan dalam Bab 3, Bab 4 dan Bab 5.

Dalam Bab 3, kajian dimulakan dengan polinomial kuadratik dua pembolehubah,

$$f(x,y)=ax^2 + bxy + cy^2 + rx + sy + t$$

dengan pekali di dalam set integer, Z. Kaedah yang digunakan adalah penyelesaian secara langsung menggunakan Petua Cramer. Seterusnya, kekardinalan bagi set $V(f_x, f_y; p^{\alpha})$ dapat ditentukan.

Dari polinomial $f(x,y)$ di atas, didapati fungsi terbitan separanya terhadap x dan y, yang ditandakan oleh f_x dan f_y adalah seperti berikut:

$$f_x(x,y) = 2ax + by + r$$

$$f_y(x,y) = bx + 2cy + s.$$

Katakan, m integer positif. Dari persamaan (1.2), sistem persamaan kongruen linear modulo m yang akan diteliti adalah berbentuk:

$$2ax + by + r \equiv 0 \pmod{m}$$

$$bx + 2cy + s \equiv 0 \pmod{m}.$$

Dalam Bab 4 pula, kajian diteruskan dengan polinomial kuadratik tiga pembolehubah,

$$f(x,y,z) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + b_1xy + b_2yz + b_3xz + c_1x + c_2y + c_3z + d$$

dengan pekali dalam set integer, Z. Kaedah yang digunakan adalah sama seperti dalam bab sebelumnya dan kekardinalan bagi set $V(f_x, f_y, f_z; p^\alpha)$ dapat ditentukan dengan fungsi terbitan separa $f(x,y,z)$ terhadap x, y dan z yang ditandakan f_x, f_y dan f_z adalah seperti berikut:

$$f_x(x,y,z) = 2a_1x + b_1y + b_3z + c_1$$

$$f_y(x,y,z) = 2a_2y + b_1x + b_2z + c_2$$

$$f_z(x,y,z) = 2a_3z + b_2y + b_3x + c_3.$$

Dari persamaan (1.2), sistem persamaan kongruen modulo m yang diteliti adalah berbentuk:

$$2a_1x + b_1y + b_3z + c_1 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_1x + 2a_2y + b_2z + c_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_3x + b_2y + 2a_3z + c_3 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Sementara itu dalam Bab 5 pula, bagi polinomial kuadratik empat pembolehubah yang dikaji berbentuk,

$$f(x,y,z,t) = a_1x^2 + a_2y^2 + a_3z^2 + a_4t^2 + b_1xy + b_2xz + b_3xt + b_4yz +$$

$$b_5yt + b_6zt + c_1x + c_2y + c_3z + c_4t + e.$$

Dengan polinomial $f(x,y,z,t)$ ini, didapati fungsi terbitan separanya adalah seperti berikut:

$$f_x(x,y,z,t) = 2a_1x + b_1y + b_2z + b_3t + c_1$$

$$f_y(x,y,z,t) = 2a_2y + b_1x + b_4z + b_5t + c_2$$

$$f_z(x,y,z,t) = 2a_3z + b_2x + b_4y + b_6t + c_3$$

$$f_t(x,y,z,t) = 2a_4t + b_3x + b_5y + b_6z + c_4 .$$

Sistem persamaan kongruen linear modulo m yang diteliti adalah terdiri daripada polinomial separa yang dikaitkan dengan persamaan $f(x,y,z,t)$, iaitu berbentuk:

$$2a_1x + b_1y + b_2z + b_3t + c_1 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_1x + 2a_2y + b_4z + b_5t + c_2 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_2x + b_4y + 2a_3z + b_6t + c_3 \equiv 0 \pmod{m}$$

$$b_3x + b_5y + b_6z + 2a_4t + c_4 \equiv 0 \pmod{m}.$$

Daripada penyelidikan kami, kekardinalan yang diperolehi dapat menganggar hasil tambah eksponen bagi polinomial-polinomial yang diperhatikan. Dalam kes polinomial kuadratik dua pembolehubah, biarkan p perdana, $\alpha > 0$ dan $\theta = \left[\frac{\alpha}{2}\right]$. Maka, anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y)$ ialah,

$$\left|S\left(f;p^{\alpha}\right)\right| \leq p^{2(\alpha-\theta)+u_1}$$

dengan $u_1 = \min\{ord_p\,(4ac\text{-}b^2),\theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \leq \min\{\text{ord}_p\, 2a, \text{ord}_p\, b\}$ dan $k \leq \min\{\text{ord}_p\, b, \text{ord}_p\, 2c\}$.

Seterusnya, bagi polinomial kuadratik tiga pembolehubah yang dikaji, katakan p perdana, $\alpha > 0$ dan $\theta = \left[\frac{\alpha}{2}\right]$. Maka anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y,z)$ ialah,

$$\left|S\left(f;p^{\alpha}\right)\right| \leq p^{3(\alpha-\theta)+u_1+u_2}$$

dengan, $(2a_1b_2 - b_1b_3) = a_{11}$, $(b_1b_2 - 2a_2b_3) = a_{12}$, $(2a_3b_1 - b_2b_3) = a_{21}$, $\left(4a_2a_3 - b_2^{\,2}\right) = a_{22}$, $u_2 \leq \min\{\text{ord}_p\, 2a_3, \text{ord}_p\, b_2, \text{ord}_p\, b_3\}$, $u_1 = \min\{\text{ord}_p\,(a_{11}a_{22}\text{-}a_{12}a_{21}),\theta\}$ atau $u_1 = l+k$ dengan $l \leq \min\{\text{ord}_p\, a_{11}, \text{ord}_p\, a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{\text{ord}_p\, a_{12}, \text{ord}_p\, a_{22}\}$.

Manakala, bagi polinomial kuadratik empat pembolehubah pula, katakan p perdana, $\alpha>0$ dan $\theta = \left[\frac{\alpha}{2}\right]$. Maka, anggaran hasil tambah eksponen bagi $f(x,y,z,t)$ ialah,

$$\left|S\left(f;p^{\alpha}\right)\right| \leq p^{4(\alpha-\theta)+u_1+u_2+u_3}$$

dengan, $(2a_1b_5 - b_1b_3) = c_{11}$, $(b_1b_5 - 2a_2b_3) = c_{12}$, $(b_2b_5 - b_3b_4) = c_{13}$, $(b_1b_6 - b_2b_5) = c_{21}$, $(2a_2b_6 - b_4b_5) = c_{22}$, $(b_4b_6 - 2a_3b_5) = c_{23}$, $(2a_4b_2 - b_3b_6) = c_{31}$, $(2a_4b_4 - b_5b_6) = c_{32}$, $(4a_3a_4 - b_6^{\,2}) = c_{33}$, $(c_{11}c_{23} - c_{21}c_{13}) = a_{11}$, $(c_{12}c_{23} - c_{22}c_{13}) = a_{12}$, $(c_{21}c_{33} - c_{31}c_{23}) = a_{21}$, $(c_{22}c_{33} - c_{32}c_{23}) = a_{22}$, $u_3 \leq \min\{\mathrm{ord}_p 2a_4, \mathrm{ord}_p\, b_3, \mathrm{ord}_p\, b_5, \mathrm{ord}_p\, b_6\}$, $u_2 \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, c_{13}, \mathrm{ord}_p\, c_{23}, \mathrm{ord}_p\, c_{33}\}$ dan $u_1 = \min\{\mathrm{ord}_p\, (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}), \theta\}$ atau $u_1 = l+k$, dengan $l \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, a_{11}, \mathrm{ord}_p\, a_{21}\}$ dan $k \leq \min\{\mathrm{ord}_p\, a_{12}, \mathrm{ord}_p\, a_{22}\}$.

1.2: Sorotan Literatur

Dalam Teori Nombor Analisis, ramai pengkaji telah memperihalkan peranan penting hasiltambah eksponen. Diantaranya ialah Davenport (1959), Igusa (1978) dan Schmidt (1982). Hasil tambah eksponen ditakrifkan sebagai

$$S(f,q) = \Sigma\, e_q(f(\underline{x}))$$

dengan hasiltambah dinilaikan bagi $\underline{x}$ dalam set lengkap reja modulo q.

Hardy dan Littlewood (1919), Deligne (1974), Loxton dan Vaughan (1985) telah mengkaji hasil tambah $S(f;q)$ dengan f polinomial tak linear dalam Z. Hasiltambah $S(f;q)$ dalam kes satu pembolehubah telah dikaji oleh Hardy dan Littlewood (1919) berhubung dengan masalah *Waring*.

Pada tahun 1940 , Hua telah mendapati bahawa wujud $\epsilon > 0$, sedemikian hingga

$$|S(f;q)| \le cp^{1-\left(\frac{1}{m}\right)+\varepsilon}$$

dengan c pemalar yang bersandar kepada m dan ϵ sahaja. Keputusan Hua telah diperbaiki oleh Jing-Run Chen (1977) yang menunjukkan bahawa jika kandungan bagi $f - f(0)$ perdana relatif terhadap q, maka

$$|S(f;q)| \le e^{7(n+1)} q^{1-\left(\frac{1}{n+1}\right)}$$

Anggaran Hua telah digunakan oleh Stechkin (1980) bagi menunjukkan bahawa

$$\left|S(f;q)\right| \le c^m q^{1-\frac{1}{m}} \left(c(f),q\right)^{\frac{1}{m}}$$

untuk suatu pemalar mutlak positif c tertentu, dengan $c(f)$ menandakan kandungan bagi $f - f(0)$. Pada tahun 1974 pula, Deligne menunjukkan bahawa untuk suatu nombor perdana p,

$$\left|S(f;q)\right| \le (m-1)^n p^{\frac{n}{2}}$$

dengan m adalah jumlah darjah bagi suatu polinomial f, apabila bahagian homogen bagi f berdarjah terbesar adalah tak singular modulo p. Kajian Deligne ini membuka jalan bagi mendapat anggaran yang lebih tepat bagi $|S(f;q)|$ untuk polinomial am f dalam beberapa pembolehubah.

Seterusnya pada tahun 1962 pula, poligon Newton telah digunakan oleh Walker dalam pembuktian Teorem Puiseux. Manakala pada tahun 1983, Sathaye juga telah mempertimbangkan perluasan kaedah Newton-Puiseux secara umum.

Pada tahun 1977, Koblitz membincangkan kaedah poligon Newton dalam kes p-adic bagi polinomial dan siri kuasa di dalam $\Omega_p[x]$. Penganggaran pensifar bagi polinomial tersebut dihasilkan daripada sifat-sifat poligon Newton yang berkaitan. Khususnya, jika λ kecerunan suatu tembereng pada

poligon Newton bagi suatu polinomial f dengan panjangnya N, maka terdapat N pensifar bagi f yang peringkat p-adicnya $-\lambda$.

Untuk setiap nombor perdana p, katakan $\underline{f} = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$ n-rangkap polinomial dalam gelanggang p-adic $Z_p[x]$ dengan $\underline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$. Kita pertimbangkan set $V(\underline{f};p^\alpha) = \{ \underline{u} \bmod p^\alpha : \underline{f}(\underline{u}) \equiv 0 \bmod p^\alpha\}$ dan tandaan $N(\underline{f};p^\alpha)$ adalah kekardinalan bagi $V(\underline{f};p^\alpha)$ dengan $\alpha > 0$ dan $\underline{u}$ mengambil nilai bagi set lengkap reja modulo p^α.

Pada tahun 1982, Loxton dan Smith telah menyelidiki penggunaan teknik poligon Newton dan akhirnya menggunakan kaedah tersebut untuk mendapatkan keputusan mereka, seperti di bawah.

Katakan, K medan nombor aljabar yang diterbitkan daripada punca-punca ξ_i, $1 \le i \le m$ bagi polinomial-polinomial $f(x)$ dalam $Z[x]$, Loxton dan Smith telah menunjukkan bahawa

$$N\left(f;p^\alpha\right) \le mp^{\alpha-\frac{(\alpha-\delta)}{e}},$$

jika $\alpha > \delta$, dengan m adalah bilangan pensifar berbeza bagi $f(x)$ dan $\delta = ord_p\, D(f)$, $D(f)$ menandakan persilangan bagi fungsian utama $\bar{K}$ yang diterbitkan daripada $\dfrac{f^{(e_i)}(\xi_i)}{e_i!}$, $i > 1$, dengan e_i gandaan pensifar ξ_i.