UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

MEMERANGKAP SUATU PENSIFAR BAGI SUATU FUNGSI DENGAN PENAMBAHBAIKAN KAEDAH SELANG

NOR ALIZA BT ABD RAHMIN.

MEMERANGKAP SUATU PENSIFAR BAGI SUATU FUNGSI DENGAN PENAMBAHBAIKAN KAEDAH SELANG

Oleh

NOR ALIZA BT ABD RAHMIN

Tesis Ini Dikemukakan Kepada Sekolah Pengajian Siswazah, Universiti Putra Malaysia,Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah Master Sains

Mei 2005

Buat kedua ibu bapa
Abd. Rahmin dan Semah

Kedua mertua
Tg.Hassan dan Tg Zuzariah
dan keluarga

Teman tersayang
Tg. Abdul Mutalib

dan Penyeri kebahagian
Tg. Afiq Qayyim
Tg. Adam Muqri

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains

MEMERANGKAP SUATU PENSIFAR BAGI SUATU FUNGSI DENGAN PENAMBAHBAIKAN KAEDAH SELANG

Oleh

NOR ALIZA BT ABD RAHMIN

Mei 2004

Pengerusi : Mansor Monsi, Phd

Fakulti : Sains

Penumpuan utama tesis ini adalah memerangkap suatu pensifar bagi suatu fungsi dengan menggunakan pendekatan analisis selang. Kami mempertimbangkan satu kaedah yang telah dilakukan oleh Ehrmann(1959) disebut kaedah EHR. Kajian ini difokuskan kepada algoritma. Jika masa pemprosesan singkat, maka analisis tatacara dikaji sehingga kadar penumpuan diperolehi.

Beberapa pengubahsuaian telah dibuat terhadap kaedah EHR iaitu kaedah MEHR1 dan Kaedah MEHR2. Tumpuan utama bagi kaedah MEHR1 adalah penggunaan titik tengah di dalam tatacara, manakala keistimewaan di dalam kaedah MEHR2 adalah pengulangan semula tatacara asal yang menghasilkan kadar penumpuan yang pantas. Ini disokong oleh masa CPU yang singkat.

Tesis ini akan meliputi tatacara analisis, algoritma pengubahsuaian dan beberapa keputusan berangka. Berdasarkan analisis yang telah dibuat, didapati bahawa kadar penumpuan bagi MEHR1 ialah $p+3,(p \geq 1)$ dan MEHR2 ialah $(2p+1)+l,(p \geq 1, l=1,\ldots,p)$

berbanding dengan EHR yang mempunyai kadar penumpuan $p+1,(p \geq 1)$. Beberapa kemungkinan kajian lanjutan turut diberi untuk mengakhiri tesis ini.

Abstract of thesis presented to the Senate of Universiti Putra Malaysia in fulfilment of the requirements for the degree of Master of Science

INCLUSION OF A ZERO OF A FUNCTION WITH IMPROVED INTERVAL METHOD

By

NOR ALIZA BT ABD RAHMIN

Mei 2004

Chairman : Mansor Monsi, Phd

Faculty : Science

The study concerns mainly on finding a zero of a function using interval analysis approach. We consider a well known method that has been done by Ehrmann(1959) which is called EHR method. This experiment is focused on the algorithm. If the processing time is less than the analytical procedure will be studied until the convergence rates are obtained.

Several modifications have been made to improve the EHR method that is the MEHR1 method and MEHR2 method. The main focus for MEHR1 method is using the mid point in its procedure, whereas the specialty in the MEHR2 method is the repetition of the original procedure to produce faster convergence rates. This is supported by the lesser CPU time.

This thesis includes the analytical procedure, the modification of the algorithm and several numerical results. Based on the analysis that had been done, the rate of the convergence for MEHR1 is $p+3,(p \geq 1)$ and MEHR2 is $(2p+1)+l,(p \geq 1, l=1,\ldots,p)$ compared to the EHR that has the rate of convergence $p+1,(p \geq 1)$. Some possible extension is also given to conclude this thesis.

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah yang Maha Pemurah dan Maha Pengasih. Segala pujian bagi Allah, Tuhan semesta alam dan selawat dan salam ke atas junjungan besar Nabi Muhammad s.a.w., keluarganya serta para sahabatnya.

Pertama sekali diucapkan jutaan terima kasih kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan Dr. Mansor Monsi atas segala bimbingan dan bantuan yang tidak ternilai. Juga jutaan terima kasih ditujukan kepada ahli-ahli yang terdiri daripada Professor Dr Malik Hj. Abu Hassan dan Prof. Madya Dr. Fudziah Bt Ismail kerana bantuan, dorongan dan motivasi yang diberikan. Terima kasih juga ditujukan kepada En. Norazak dan Dr. Leong Wah June di atas bantuan yang diberikan serta kawan-kawan yang memberi semangat dan dorongan.

Seterusnya segala ucapan ditujukan kepada suami tersayang serta anak-anak tercinta atas segala pengorbanan, dorongan, sokongan serta kesabaran yang telah dicurahkan.

KANDUNGAN

SENARAI JADUAL

SENARAI RAJAH

SENARAI SIMBOL DAN SINGKATAN

R	menandakan nombor nyata.
$I(R)$	ialah set suatu selang nyata.
$q(a,b)$	jarak di antara dua selang.
$d(a,b)$	lebar suatu selang.
$\|A\|$	nilai mutlak bagi suatu selang.
$A \cap B$	tindanan bagi suatu selang.
Min	menandakan minimum.
Maks	menandakan maksimum.

BAB 1

PENGENALAN

1.1 Penyusunan Tesis

Dalam tesis ini kami mengkaji beberapa tatacara lelaran untuk mengira nilai hampiran pensifar bagi suatu fungsi secara serentak dan kami memberi tumpuan dalam mendapatkan penyelesaian berangka menggunakan pendekatan analisis selang. Kami mulakan bab ini dengan memberi maklumat tentang pengenalan sifat-sifat asas selang bagi nombor nyata [Lihat (Caprani dan Madsen (1978)), (Karl dan Nickel (1980)), (Alefeld dan Herzberger (1983),(1974))] yang selalu digunakan dalam penyelesaian berangka.

Dalam Bab 2, kami pertimbangkan beberapa kaedah seperti kaedah berbentuk Newton (Moore (1966)), penentuan kaedah optimum dan kaedah penumpuan bagi persamaan kuadratik untuk mengira nilai hampiran pensifar bagi suatu fungsi secara serentak yang telah diuji oleh beberapa penyelidik sebelum ini seperti Ehrlich (1967), Braess dan Hadeley (1973). Tujuannya difokuskan kepada syarat cukup untuk suatu algoritma itu menuju kepada penyelesaian dengan suatu kadar penentuan tertentu. Kemudian terdapat beberapa penyelidik telah mengembangkan kaedah di atas yang melibatkan pendekatan analisis selang seperti Gangantini (1975), Glaiz (1975) dan Hansen (1978).

Bab 3, kami pertimbangkan pula kaedah yang diperkenalkan oleh Ehrmann(1959) dan kita namakan dengan kaedah Ehrmann(EHR) bagi memerangkap suatu pensifar bagi suatu fungsi dengan menggunakan pendekatan analisis selang. Kadar penumpuan bagi kaedah tersebut ialah $p + 1$ $(p \geq 1)$.

Dalam Bab 4 dan Bab 5 pula mengandungi dua huraian pengubahsuaian yang telah dibuat ke atas kaedah Ehrmann(EHR) iaitu kaedah pengubahsuaian EHR yang dinamakan MEHR1 dan pengubahsuaian EHR yang ke-2 dinamakan MEHR2. Kedua-dua pengubahsuaian ini dapat menunjukkan analisis dan prestasi yang lebih baik selari dengan masa pemprosesan yang diperolehi. Analisis penumpuan bagi setiap kaedah pengubahsuaian turut diberikan.

Akhirnya, Bab 6 membincangkan kesimpulan bagi keseluruhan kajian serta beberapa cadangan untuk kajian lanjutan bagi penyelidik-penyelidik dalam bidang pengoptimuman.

1.2 Sorotan Literatur

Penyelidik-penyelidik seperti Aberth(1973), Alefeld dan Herzberger(1974), Braess dan Hadeler(1973) dan Ehrlic(1967) telah mengkaji beberapa tatacara lelaran untuk mencari suatu pensifar bagi suatu fungsi secara berangka di mana kajian biasanya difokuskan kepada algoritma. Jika masa pemprosesannya singkat, maka analisis dikaji sehingga kadar penumpuan diperolehi.

Selain itu beberapa penyelidik telah menunjukkan tatacara lelaran yang melibatkan analisis selang seperti yang terdapat dalam Gargangtini(1975), Glaiz(1975) dan Hansen(1978). Pendekatan analisis selang adalah lebih sempurna kerana ia boleh merangkumi suatu pensifar bagi fungsi tertentu. Kajian yang dilakukan oleh Ehrmann(1959) yang disebut kaedah EHR, bagi memerangkap suatu pensifar bagi suatu fungsi dengan menggunakan pendekatan analisis selang. Memerangkap suatu pensifar di dalam selang terakhir terkecil daripada suatu jujukan selang $\{X^{(k)}\}_0^\infty$ telah diterbitkan dalam Alefeld dan Herzberger(1983).

Beberapa pengubahsuaian telah dibuat terhadap kaedah EHR. Analisis teori menunjukkan MEHR1 dan MEHR2 mempunyai kadar penumpuan yang pantas. Ini disokong oleh masa CPU yang singkat. Tesis ini akan meliputi analisis, algoritma kaedah pengubahsuaian dan beberapa keputusan berangka. Kesimpulan dan beberapa kemungkinan kajian lanjutan turut diberi untuk mengakhiri tesis ini.

1.3 Skop Masalah

Dalam tesis ini masalah utama ialah memerangkap suatu pensifar bagi suatu fungsi di dalam selang terakhir yang lebarnya terkecil daripada suatu jujukan selang $\{X^{(k)}\}_0^\infty$ dan masalah ini telah banyak dibincangkan oleh Alefeld dan Herzberger(1983), Sissers (1982), Walster dan Hansen (1997), ANSI/IEE (1985), Benhamou dan Older (1995), Ely (1993), John Todd (1989), Kearfott (1994), Kerner (1966) dan Knuppel (1994). Jujukan tersebut dijanakan daripada Siri Taylor berikut:

$$0 = f(\xi) = f\left(x^{(k)}\right) + f'\left(x^{(k)}\right)\left(\xi - x^{(k)}\right) + \ldots + \frac{1}{(i+1)!} f^{(i+1)}\left(x^{(k)}\right)\left(\xi - x^{(k)}\right)^{(i+1)} + \frac{1}{(i+2)!} f^{(i+2)}\left(\eta_{i+2}\right)\left(\xi - x^{(k)}\right)^{(i+2)} \tag{1.1}$$

Oleh yang demikian,

$$\xi = x^{(k)} - \frac{1}{f'\left(x^{(k)}\right)}\left[f\left(x^{(k)}\right) + \sum_{\upsilon=2}^{i+1} \frac{f^{\upsilon}\left(x^{(k)}\right)}{\upsilon!}\left(\xi - x^{(k)}\right)^{\upsilon} + \frac{f^{(i+2)}\left(\eta_{i+2}\right)}{(i+2)!}\left(\xi - x^{(k)}\right)^{(i+2)}\right] \tag{1.2}$$

dengan $\eta_{i+2} \in \left(x^{(k)}, \xi\right)$.

Dengan menggabungkan konsep analisis selang terhadap persamaan (1.2) ini, kita perolehi

$$X^{(k+1)} = \left\{ x^{(k)} - \frac{1}{f'\left(x^{(k)}\right)} \left[f\left(x^{(k)}\right) + \sum_{\upsilon=2}^{i} \frac{1}{\upsilon!} f^{\upsilon}(x^{(k)})(X^{(k)} - x^{(k)})^{\upsilon} \right.\right.$$

$$\left.\left. + \frac{1}{(i+1)!} F_{i+1} (X^{(k)} - x^{(k)})^{(i+1)} \right] \right\} \cap X^{(k)} \qquad (1.3)$$

untuk $1 \leq i \leq p, k \geq 0$.

Dalam tatacara di atas, ξ telah digantikan dengan $X^{(k)}$(selang kanan persamaan) dan $X^{(k+1)}$ (selang kiri persamaan), manakala $f^{(i+1)}$ dengan selang $F_{i+1} = f^{(i+1)}\left(X^{(k)}\right)$.

(1.3) memenuhi syarat

$$X^{(0)} \supset X^{(1)} \supset X^{(2)} \supset \ldots \supset X^{(k)} \supset X^{(k+1)} \ldots$$

dan pensifar,

$$\xi \in X^{(k)}, \forall k \geq 0$$

sehingga

$$\underset{k \to \infty}{had}\, X^{(k)} = \xi = [\xi, \xi] \,.$$

Titik $x \in X^{(k)}$, boleh dipilih sebarangan.Tetapi di dalam tesis ini, x adalah titik tengah $X^{(k)}$dan ditulis $x \in m\left(X^{(k)}\right)$. Selang $M = [m_1, m_2]$

yang digunakan adalah bagi menetapkan

$$m_1 \leq \frac{f(x)-f(\xi)}{x-\xi} = \frac{f(x)}{x-\xi} \leq m_2 < \infty, \xi \neq x \in X^{(k)}, \ (k \geq 0).$$

1.4 Konsep dan Sifat-Sifat Selang

Tujuan bahagian ini ialah untuk mengemukakan sifat-sifat nombor selang (Alefeld dan Herzberger (1983)) yang kerap digunakan dalam Bab 4 dan Bab 5.

Set bagi suatu selang nyata tertutup ditanda sebagai $I(R) = \{[a,b] \| a,b \in R\}$. Nombor nyata, $x \in R$ boleh dinyatakan dalam bentuk selang $[x,x] \in I(R)$ dan secara umum dinamakan selang titik. Takrifan dan teorem berikut boleh diperolehi daripada (Alefeld dan Herzberger(1983)) yang digunakan di dalam Bab 3 , Bab 4 dan Bab 5.

Takrif 1.1

Katakan $* \in \{+,-,\bullet,/\}$ adalah operasi binari ke atas set suatu nombor nyata R. Jika $A, B \in I(R)$ maka

$$A * B = \{ Z = a * b \mid a \in A, b \in B \}$$

tertakrif ke atas $I(R)$ dan kita anggap $0 \notin B$ bagi kes hasil bahagi. Operasi ke atas selang $A = [a_1, a_2]$ dan $B = [b_1, b_2]$ boleh ditakrifkan seperti di bawah

$$A + B = [a_1 + b_1, a_2 + b_2]$$

$$A - B = [a_1 - b_2, a_2 - b_1]$$

$$A \bullet B = [min\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2 b_2\}, maks\{a_1b_1, a_1b_2, a_2b_1, a_2 b_2\}]$$

$$A / B = [a_1, a_2][1/b_2, 1/b_1]$$

Contoh 1.1.1

Katakan $A = [1,2]\ dan\ \ B = [3,4]$, maka

$$A + B = [1,2] + [3,4] = [1+3, 2+4] = [4,6]$$

$$A - B = [1,2] - [3,4] = [1-4, 2-3] = [-3,-1]$$

$$A \bullet B = [1,2] \bullet [3,4] = [min\{3,4,6,8\}, maks\{3,4,6,8\}] = [3,8]$$

$$A / B = [1,2]\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$$

$$= \left[min\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}\right\}, maks\left\{\frac{1}{4}, \frac{1}{3}, \frac{2}{4}, \frac{2}{3}\right\}\right] = \left[\frac{1}{4}, \frac{2}{3}\right]$$

Contoh 1.1.2

Katakan $A = [-2,-1]\ dan\ \ B = [3,4]$, maka

$$A + B = [-2,-1] + [3,4] = [-2+3, -1+4] = [1,3]$$

$$A - B = [-2,-1] - [3,4] = [-2-4, -1-3] = [-6,-4]$$

$$A \bullet B = [-2,-1] \bullet [3,4]$$

$$= [min\{-6,-8,-3,-4\}, maks\{-6,-8,-3,-4\}] = [-8,-3]$$

$$A / B = [-2, -1]\left[\frac{1}{4}, \frac{1}{3}\right]$$

$$= \left[min\left\{\frac{-2}{4}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{3}\right\}, maks\left\{\frac{-2}{4}, \frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}, \frac{-1}{3}\right\} \right]$$

$$= \left[\frac{-2}{3}, \frac{-1}{4}\right]$$

Takrif 1.2

Jika *r(x)* adalah fungsi selanjar ke atas *R* maka

$$r(\underline{X}) = \left[\min_{x \in \underline{X}} r(x), \operatorname{maks}_{x \in \underline{X}} r(x) \right]$$

tertakrif ke atas $I(R)$.

Teorem 1.1

Katakan $A^{(k)}, B^{(k)} \in I(R)$, $(k = 1,2)$, kita andaikan bahawa

$$A^{(k)} \subseteq B^{(k)}, \quad (k = 1,2).$$

Maka bagi operasi $* \in \{+,-,\bullet,/\}$, kita boleh tuliskan sebagai

Teorem 1.2

Katakan $A, B \in I(R)$ dengan $a \in A, b \in B$ dan $a * b \in A * B$ bagi $* \in \{+,-,\cdot,\ /\}$. Operasi *r(x)* dari takrifan 1.2 mempunyai sifat-sifat

$$X \subseteq Y \Rightarrow r(X) \subseteq r(Y)$$

dan

$$x \in X \Rightarrow r(x) \in r(X).$$

Takrif 1.3

Lebar bagi suatu selang $A = [a_1, a_2]$ ditakrifkan sebagai

$$d(A) = a_2 - a_1 \geq 0 .$$

Jika $B = [b,b] = b$, $b \in R$ maka nombor nyata B boleh dikategorikan sebagai set selang $\{B \in I(R) \mid d(B) = 0\}$.

Daripada takrifan di atas, kita dapati wujud beberapa sifat-sifat asas.

Sifat 1.1

Bagi sebarang $A, B \in I(R)$

(b1) $A \subseteq B \Rightarrow d(A) \leq d(B)$

(b2) $d(A \pm B) = d(A) + d(B)$

(b3) $d(A) = \underset{a,b \in A}{maks} |a - b|$

Takrif 1.4

Nilai mutlak bagi selang $A = [a_1, a_2]$ ditakrifkan sebagai $|A| = maks\ \{ |a_1|, |a_2| \}$.

Takrif 1.5

Jika $A, B \in I(R)$ maka $A \subseteq B \Rightarrow |A| \leq |B|$.