Pertanika 15(1), 69-73 (1992)

Kegunaan Sub-Martingale dalam Masalah Storan

MOHD. KIDIN SHAHRAN
Fakulti Sains Matematik dan Komputer,
Universiti Kebangsaan Malaysia,
43600 Bangi, Selangor Darul Ehsan, Malaysia.

ABSTRAK

Sebuah tangki air dengan muatan terhingga. Dengan bantuan teori Sub-Martingale, suatu batas jangkaan masa minimum tangki air menjadi tongkang akan diperolehi.

ABSTRAK

Consider a water tank with a finite capacity. With the help of the Sub-Martingale theory a lower bound of the expectation of the minimum time the tank takes to become empty is found.

PENGENALAN

Pertimbangkan sebuah tangki air dengan muatan terhingga, dan Z_t sebagai muatan dalam tangki *pada masa t*. Katakan M_t dan K_t masing-masing sebagai alir-masuk dan alir-keluar *dalam masa (t, t+1)*. Maka secara efektifnya, aras air *pada masa t+1* ialah

$$Z_{t+1} = \min\left\{\left(Z_t + X_{t+1}\right)^+, m\right\} \qquad (1)$$

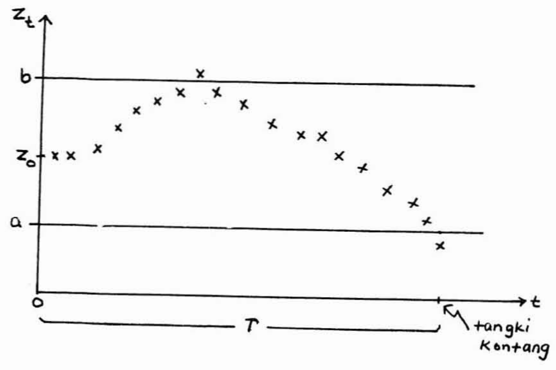
yang m > o ialah muatan tangki dan

$$X_{t+1} = M_t - K_t,$$

dan tandaan

$$x^+ = maks\ (0.x).$$

Masalah muatan tangki air ini boleh dipadankan dengan *masalah perjalanan rawak dengan dua sempadan* (Cox and Miller 1970), iaitu dengan mengambil $Z_0 = z$ sebagai muatan asal tangki $a \leq z < b$. (Rujuk *Rajah 1*). Dalam rajah tersebut, apabila tangki kosong *buat kali pertama*, Masa T boleh dipadankan dengan *masa Markov* dalam teori perjalanan rawak itu.



Rajah 1. Gerakan muatan tangki 'X' antara dua sempadan a, b.

PERMULAAN

2.1. *Takrif* pembolehubah rawak T dinamakan *masa Markov* terhadap proses Markov $\{X_n\}$ jika T mengambil nilai-nilai 0, 1, 2,... dan peristiwa $\{T = n\}$ ditentukan oleh $\{X_n\}$, n = 0, 1, 2,.... [3].

2.2. *Takrif* proses $\{X_n\}$, n = 0,1, 2... dinamakan *sub-Martingale* [3] terhadap $\{Y_n\}$, n = 0, 1, 2,... jika

a) $E(X_n^+) < \infty$;

b) $E\left[X_{n+1} \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right] \geq X_n$;

c) X_n ialah fungsi kepada $Y_o, \ldots, Y_n$.

2.3 *Lema*

Jika $\{X_n\}$ *sub-Martingale* terhadap $\{Y_n\}$ maka

$$E\left[X_{n+k} \mid Y_n, ..., Y_o\right] \geq X_n \tag{2}$$

untuk semua $k \geq 1$

[Bukti diberikan dalam umbaian U1]

2.4 *Lema*

Katakan $\{X_n\}$ *sub-Martingale* dan *T masa Markov* terhadap $\{Y_n\}$; maka untuk semua integer $n \geq k \geq o$,

$$E\left[X_n \mid T = k\right] \geq E\left[X_k \mid T = k\right] \tag{3}$$

[Bukti diberikan dalam umbaian U2]

2.5 *Lema*

Katakan $\{X_n\}$ ialah *sub-Martingale* dan *T masa Markov*, maka

$$E\left[X_o\right] \leq E\left(X_{T\Lambda n}\right) \leq E\left(X_n\right) \tag{4}$$

[Bukti diberikan dalam umbaian U3]

Batas Bawah Jangkaan Masa Minimum Tangki Kontang (BBJT).

Merujuk Bahagian 1, katakan *masa Markov T* diberi olah

$T = min\ \{t : Zt \leq a\}$.

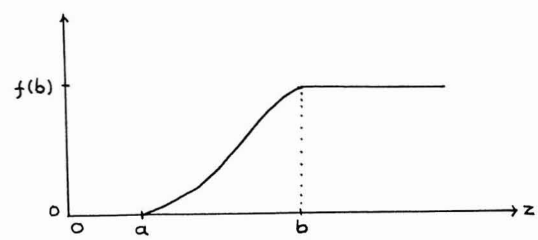
Jika μ dan β ialah pemalar positif yang memuaskan

i) $E\ [X_{t+1} \mid X_t, ..., X_o] \leq \mu$

ii) $E\ [e^{-\beta X_{t+1}} \mid X_t, ..., X_o] \leq 1$ (5)

maka

$$E(T) \geq f(z) \tag{6}$$



Rajah 2: Graf fungsi f(z)

yang $z = Z_o$ $(a \leq z \leq b)$ adalah kandungan asal air dalam tangki, dan f(z) suatu fungsi menokok berekanda dengan

$$f(z) = \begin{cases} 0 & z < a \\ \mu^{-1}\left\{e^{\lambda(b-a)}\left(1-e^{-\lambda(z-a)}\right) - (z-a)\right\} & a \leq z \leq b \\ f(b) & z > b \end{cases} \tag{7}$$

Graf f(z) diberikan dalam *Rajah 2.*

Pernyataan (6) di atas dapat ditahkik dengan kaedah *Martingale* (Gredenko 1968; Mohd. Kidin 1988) seperti berikut:

Setelah pergerakan muatan tangki itu dipadankan dengan *proses perjalanan rawak* kita boleh mentakrifkan *sub-Martingale* yang sesuai dengannya.

Ambil pembolehubah rawak X_n yang dijanakan oleh

$$X_n = f(Z_n) + n$$

$$\text{maka} \quad \{X_n\},\ n = 0, 1, 2, ... \tag{8}$$

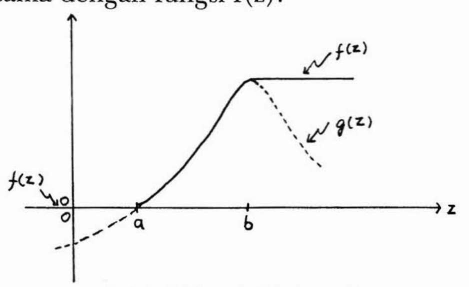
adalah *sub-Martingale* terhadap proses $\{Y_n\}$ yang dicerap.

Bukti

Takrifkan fungsi g(z) sebagai

$$g(z) = \mu^{-1}\ \mu^{-1}\left\{e^{\lambda(b-a)}\frac{\left(1-e^{-\lambda(z-a)}\right)}{\lambda} - (z-a)\right\} \forall z \tag{9}$$

dengan grafnya diberikan dalam *Rajah 3* bersama dengan fungsi f(z).



Rajah 3: Fungsi f(z) dan g(z)

maka daripada persamaan (9) diperolehi

$$g(z) = f(z), \qquad a < z < b;$$

$$g(z) < f(z), \qquad z \text{ yang lain.} \tag{10}$$

Sekarang

$$E\left[X_{n+1} \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right] = E\left[f\left(z_{n+1}\right) \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right] + (n+1)$$

$$= E\left[f\left(Z_n + Y_{n+1}\right) \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right] + (n+1) \qquad (11)$$

$$\geq E\left[g\left(Z_n + Y_{n+1}\right) \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right] + (n+1) \qquad (12)$$

daripada keputusan (10). Dengan menggunakan (9) pada bahagian kanan ketaksamaan (12), diperolehi

$$\begin{aligned} & E\left[g\left(Z_n + Y_{n+1}\right) \mid Y_n, \ldots, Y_o\right] + (n+1) \\ &= \mu^{-1}\left\{ e^{\lambda(b-a)} \frac{\left(1 - E\left[e^{-\lambda(z_n + Y_{n+1} - a)} \mid Y_n, \ldots, Y_o\right]\right)}{\lambda} - \left(E\left[Z_n + Y_{n+1} - a\right] \mid Y_n, \ldots, Y_o\right) \right\} + (n+1) \\ &= \mu^{-1}\left\{ e^{\lambda(b-a)} \frac{\left(1 - e^{-\lambda(z_n - a)} E\left[e^{-\lambda Y_{n+1}} \mid Y_n, \ldots, Y_o\right]\right)}{\lambda} - \left((Z_n - a) + E\left[Y_{n+1} \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right]\right) \right\} + (n+1) \end{aligned}$$

Seterusnya daripada syarat (5) maka

$$\begin{aligned} E\left[X_{n+1} \middle| Y_n, \ldots, Y_o\right] &\geq \mu^{-1}\left\{ e^{\lambda(b-a)} \frac{\left(1 - e^{-\lambda(Z_n - a)}\right)}{\lambda} - \left(Z_n - a + \mu\right) \right\} + (n+1) \\ &= \mu^{-1}\left\{ e^{\lambda(b-a)} \frac{\left(1 - e^{-\lambda(Z_n - a)}\right)}{\lambda} - \left(Z_n - a\right) \right\} - 1 + n + 1 \\ &= f\left(Z_n\right) + n \\ &= X_n \end{aligned}$$

Oleh itu proses $\{X_n\}$ dengan X_n dijanakan seperti dalam (8) adalah *sub-Martingale.* Seterusnya dengan batuan *Lema* 2.5, diperoleh

$$\begin{aligned} E\left[X_{T\Lambda n}\right] &\geq E\left(X_o\right) \\ &= E\left(f\left(Z_o\right)\right) + 0 \\ &= f(z) \end{aligned}$$

iaitu

$$E\left[f\left(Z_{T\Lambda n}\right) + T\Lambda n\right] \geq f(z) \qquad (13)$$

tetapi

$$\begin{aligned} \operatorname*{had}_{n\to\infty} E\left[f\left(Z_{T\Lambda n}\right)\right] &= E\left[f\left(Z_T\right)\right] \\ &= 0 \quad \because Z_T \leq a \ \text{ dan } \\ & \qquad f(z) = 0, \ z \leq a. \end{aligned}$$

dan

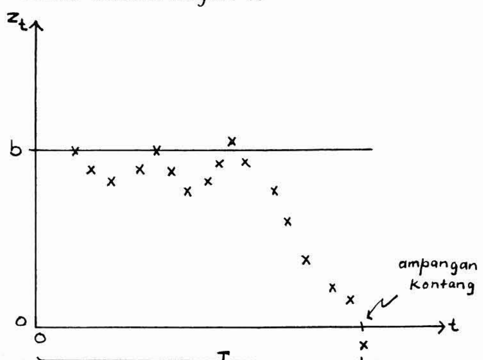
$$\operatorname*{had}_{n\to\infty} E\left[T\Lambda n\right] = E(T)$$

Oleh itu daripada (13),

$$E(T) \geq f(z)$$

CONTOH

Pertimbangkan storan air dalam ampangan. Dalam hal ini, tanpa menghilangkan itlaknya ambil a = 0. Maka masalah storan ini ialah masalah perjalanan rawak satu sempadan seperti digambarkan dalam *Rajah 4.*



Rajah 4: Gerakan muatan ampangan air 'X'

Masalah

i) Pertimbangkan kes bermula dengan ampangan penuh. Oleh itu dengan merujuk kepada pentakrifan dalam Bahagian 2, ambil a = 0 dan z = b.

ii) Katakan Y_1, Y_2, ... adalah tak bersandar tertabur sepercaman normal dengan min μ dan varians

$$\sigma^2 = 2\mu/\lambda \qquad (14)$$

Oleh itu syarat (5) dipenuhi kerana

$$\begin{aligned} E\left[Y_{n+1} \mid Y_n, \ldots, Y_o\right] &= E\left[Y_{n+1}\right] \\ &= E\left[Y_i\right] = \mu, \ i = 0, \ldots, n. \end{aligned}$$

dan

$$\begin{aligned} & E\left[\operatorname{eksp}\left(-\lambda Yn + 1\right) \mid Yn, \ldots, Y_o\right] \\ &= E\left[\operatorname{eksp}\left(-2\mu/\sigma^2 \, Y_{n+1}\right)\right] \end{aligned}$$

$= 1$ (lihat umbaian U4).

Sekarang BBMT, f(z) diberi oleh persamaan (7) iaitu

$$f(z) = f(b) = \mu^{-1}\left\{ e^{2\mu/\sigma^2 b}\frac{1-e^{-\mu/\sigma^2 b}}{2m/\sigma^2} - b \right\}$$

$$= \mu^{-1}\frac{\sigma^2}{2\mu}\left[e^{\sigma^2} - 1 - \frac{2\mu b}{\sigma^2} \right]$$

$$= \frac{\sigma^2}{2\mu^2}\left[e^{\sigma^2} - 1 - \frac{2\mu b}{\sigma^2} \right].$$

Umpamanya, jika $\sigma^2 = 1$, $b = 2$ unit, $\mu = 0.5$, maka BBMT bagi kes ini bernilai

$$f(b) = f(z) = 2\,[e^2\text{-}1\text{-}2]$$
$$= 8.8$$

dan jika $\mu = 0.2$, $b = 5^2$, $\sigma = 1$, maka BBMTnya ialah

$$f(b) = \frac{1}{2} \times 0.04\,[e^2\text{-}1\text{-}2] = 54.9.$$

PENUTUP

Dengan mentakrifkan sub-Martingale bagi proses $\{Z_t\}$, *batas bawah jangkaan masa minimum storan kontang* (BBMT) diberikan oleh f(z) seperti dalam persamaan (7).

RUJUKAN

COX., D. R. and H. D. MILLER. 1970. *The Theory of Stochastic Processes.* London: Chapman & Hall.

GNEDENKO, B. V. 1968: *The Theory of Probability.* New York: Chelsea Pub. Co.

MOHD. KIDIN SHAHRAN. 1988. Beberapa Kegunaan Martingale dalam Gerakan Brownan. *Sains Malaysiana* **17(4)**: 481-490.

(Diterima 11 Mei, 1991)

Umbaian U1

Bukti *lema* 2.3 dengan aruhan.

keputusan (2) sah untuk k = 1. Anggap (2) sah untuk k dan pertimbangkan untuk k + 1 maka

$$E\left[X_{n+k+1} \mid Y_n, \ldots, Y_o\right]$$
$$= E\left[E\left\{X_{n+k+1} \mid Y_{n+k}, \ldots, Y_o\right\} \mid Y_n, \ldots, Y_o\right]$$
$$\geq E\left[X_{n+k} \mid Y_n, \ldots, Y_o\right]$$

$= X_n$ daripada keputusan (2).

Umbaian U2

Bukti *Lema* 2.4

Pertimbangkan

$$E\left[X_n \mid T = k\right] Kb\left[T = k\right] = E\left[X_n . I_{\{T=k\}}\right]$$
$$= \underset{x}{E}\left[\underset{y}{E}\left[X_n I_{\{T=k\}} \mid Y_k, \ldots, Y_o\right]\right]$$
$$= E\left[I_{\{T=k\}} E\left[X_n \mid Y_k, \ldots, Y_o\right]\right]$$

yang

$$I_c = \begin{cases} 1 & \text{jika peristiwa c berlaku} \\ 0 & \text{jika sebaliknya .} \end{cases}$$

$$= E\left[I_{\{T=k\}} E\left[X_{k+n-k} \mid Y_k, \ldots, Y_o\right]\right]$$

$\geq E\left[I_{\{T=k\}} X_k\right]$ daripada *lema* 2.3

$$= E\left[X_k \mid T = k\right] Kb\left[T = k\right]$$

$$\therefore \quad E\left[X_n \mid T = k\right] \geq E\left[X_k \mid T = k\right]$$

Umbaian U3

Bukti *lema* 2.5

Pertimbangkan peristiwa

$$X_{T\wedge n} = X_T I_{\{T<n\}} + X_n I_{\{T>n\}}$$

$$\therefore \quad E\left[X_{T\wedge n}\right] = E\left[X_T I_{\{T<n\}}\right] + E\left[X_n I_{\{T\geq n\}}\right]$$
$$= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[X_T I_{\{T=k\}}\right] + E\left[X_n I_{\{T\geq n\}}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{k=0}^{n-1} E\left[X_k I_{\{T=k\}}\right] + E\left[X_n I_{\{T\geq n\}}\right] \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} E\left[X_n I_{\{T=k\}}\right] + E\left[X_n I_{\{T\geq n\}}\right] \\
&= E\, X_n \left\{\sum_{k=0}^{n-1} I_{\{T=k\}} + I_{\{T\geq n\}}\right\} \\
&= E\left(X_n\right)
\end{aligned}
$$

Pertimbangkan jujukan

$$\tilde{X}_o = 0,\ \tilde{X}_n = \sum_{k=1}^{n} \left\{X_k - E\left[X_k \middle| Y_{k-1}, \ldots, Y_o\right]\right\}$$

maka $\left\{\tilde{X}_n\right\}$ ialah Martingale

$$
\begin{aligned}
\therefore\ 0 = E\left(\tilde{X}_o\right) &= E\left[\tilde{X}_{T\wedge n}\right] \\
&= E\left[\sum_{k=1}^{T\wedge n} \left\{X_k - E\left[X_k \middle| Y_{k-1}, \ldots, Y_o\right]\right\}\right] \\
&\leq E\left[\sum^{T\wedge n} \left\{X_k - X_{k-1}\right\}\right] \quad \textit{lema}\ 2.4 \\
&= E\left[\sum_{k=0}^{T\wedge n} X_k - X_o - \sum_{\ell=0}^{(T\wedge n)-1} X_\ell\right] \\
&= E\left[\sum^{T\wedge n} X_k - \sum^{(T\wedge n)-1} X_\ell\right] - E\left[X_o\right] \\
&= E\left[X_{T\wedge n}\right] - E\left[X_o\right] \\
\therefore\ E\left[X_{T\wedge n}\right] &\geq E\left[X_o\right]
\end{aligned}
$$

Umbaian U4

Di tunjukkan

$$E\left[e^{\frac{-2\mu}{2} Y_n}\right] = 1$$

yang$\{Y_n\}_{n=0,1,\ldots}$ tertabur tak bersandar sepercaman normal dengan min μ dan varians $\sigma^2 = 2\mu/\lambda$.

Katakan $M(\theta)$ ialah Fungsi Penjana Momen $N\left(\mu.\sigma^2\right)$ yang fungsi penjana momennya diberi oleh

$$M\left(\theta\right) = e^{\theta\mu + \frac{\sigma^2\theta^2}{2}}$$

Maka persamaan

$$
\begin{aligned}
& M\left(\theta\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & E\left(e^{\theta Y_n}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & e^{\mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2} = 1 \\
\Leftrightarrow\quad & \mu\theta + \frac{1}{2}\sigma^2\theta^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\quad & \theta = 0 \text{ atau } \theta = \frac{-2\mu}{\sigma^2}
\end{aligned}
$$

Oleh itu apabila $\theta = \dfrac{-2\mu}{\sigma^2}$, maka

$$M\left(\theta\right) = E\left(e^{\theta Y_n}\right) = 1$$