Pertanika 12(1), 99-106 (1989)

Satu Kajian tentang Getaran Terusik ke atas Selaput Segi Empat Sama dengan Menggunakan Teori Usikan.

ZAINUL ABIDIN HASSAN and SALWA BT. ABU BAKAR
Jabatan Fizik
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Pertanian Malaysia
43400 UPM Serdang, Selangor Darul Ehsan, Malaysia

MOHD. LOTFY B. ALI SABRAN
Jabatan Matematik
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar
Universiti Pertanian Malaysia
43400 UPM Serdang, Selangor Darul Ehsan, Malaysia

ABSTRAK

Dengan menggunakan teori usikan, kajian ke atas getaran selaput segi empat sama dibuat. Ia menunjukkan bahawa andainya taburan jisim selaput tersebut tidak sekata maka akan berlaku perubahan pada bentuk getaran dan juga frequensi yang terhasil. Bentuk getaran dan frequensi yang terhasil tersebut dapat diperihalkan oleh teori usikan. Dengan menggunakan komputer bentuk perubahan getaran tersebut dapat dilihat dengan tepat.

ABSTRACT

A study of perturbed vibration on a square membrane using standard perturbation theory is conducted. It is shown that uneven distribution of mass on the membrane would result in a different shape of vibration. This, in turn, resulted in a change in frequency. Both of these can be described using perturbation theory. Hence, a computer is used to draw the shape of the vibration.

1. PENDAHULUAN

Getaran di atas selaput merupakan satu fenomenon fizik yang dipelajari oleh mana-mana pelajar fizik pada peringkat universiti. Ia merupakan satu penyelasaian kepada persamaan gelombang dengan syarat sempadan yang tertentu. Getaran di atas selaput merupakan pengunggulan kepada sistem yang sebenarnya, seperti getaran pada permukaan gendang, kompang, rebana dan mana-mana alat muzik yang sepertinya. Penyelesaian ini mengandaikan bahawa ketumpatan permukaan bagi selaput tersebut adalah sekata.

Teori usikan adalah satu kaedah penghampiran yang terkenal dalam matematik dan fizik. Ia digunakan untuk mendapat penyelesaian secara hampir bagi sistem yang sukar untuk mendapat penyelesaian secara tepat. Kalaulah sistem yang ingin dikaji tersebut mempunyai persamaan dengan model yang mana penyelesaiannya diketahui dengan tepat, maka kaedah teori usikan boleh digunakan. Kaedah ini sangatlah berguna kerana teori usikan boleh digunakan peringkat demi peringkat sehingga kepada darjah ketepatan yang diperlukan.

2. GETARAN ATAS SELAPUT

Pergerakan selaput diperihalkan oleh persamaan gelombang iaitu (Pain 1975)

$$\frac{T}{\rho}\nabla^2\psi = \frac{\partial^2\psi}{\partial^2 t^2} \ldots (1)$$

dengan $\frac{T}{\rho} = c^2$ dan c ialah halaju perambatan gelombang di atas permukaan tersebut. Dengan menggunakan kaedah pemisahan pemboleh-ubah, penyelesaian ψ dengan di mana ψ adalah sifar pada bingkai segiempat sama yang mempunyai panjang pinggir L ialah

$$\psi = A\sin\left(m\frac{\pi x}{L}\right)\sin\left(n\frac{\pi y}{L}\right)\exp(i\omega t) \ldots (2)$$

Ini adalah gelombang pegun dalam dua dimensi, dengan A sebagai amplitud gelombang, m dan n adalah sebarang integer yang mempunyai hubungan seperti berikut :

$$k = \frac{\pi}{L}\sqrt{n^2 + m^2}$$

dengan k sebagai nombor gelombang, sementara ω mempunyai kaitan dengan k seperti berikut :

$$\omega = kc$$

oleh sebab itu

$$\omega^2 = \frac{c^2\pi^2}{L^2}(n^2 + m^2)$$

$$\omega^2 = \left(\frac{T}{\rho}\right)\frac{\pi^2}{L^2}(n^2 + m^2) \ldots (3)$$

Dari persamaan (2), ψ boleh ditulis seperti berikut :

$$\psi = \phi(x, y)\; T(t)$$

di mana $\phi(x, y)$ adalah fungsi yang bergantung pada ruang semata-mata sementara T(t) adalah fungsi yang bergantung pada masa semata-mata. Oleh itu persamaan (1) boleh ditulis seperti berikut :

$$-\frac{T}{\rho}\nabla^2\phi(x, y) = \omega^2\phi(x, y) \ldots (4)$$

Persamaan (4) adalah persamaan eigen dengan $\phi(x, y)$ sebagai fungsi eigen, ω^2 sebagai nilai eigen dan $-\frac{T}{\rho}\nabla^2$ sebagai operator eigen. Secara fiziknya proses matematik di atas samalah dengan mengambil gambar keadaan selaput tersebut pada satu ketika di mana amplitud getaran pada ketika itu ialah maksimum. Sementara $\phi(x, y)$ ialah fungsi yang mempunyai pertalian berikut:

$$\phi(x, y) = \frac{2}{L}\sin\left(m\pi\frac{x}{L}\right)\sin\left(\pi n\frac{y}{L}\right) \ldots (5)$$

dengan $\frac{2}{L}$ sebagai faktor penormalan, Rajah (1), menunjukkan bentuk selaput tersebut untuk m = 2, n = 2.

Garis nod berlaku apabila $\phi(x, y) = 0$ iaitu pada $x = \frac{iL}{n}$ dan $y = \frac{jL}{m}$ dengan i dan j sebagai sebarang nombor asli. Rajah (1b) menunjukkan garisan nod untuk mod getaran $m = 2$, $n = 2$. Sementara rajah (1c) ialah kontornya.

3. TEORI USIKAN

3.1 Teori Usikan ke atas Kes Tidak Degenerat

Katakan operator yang bertindak pada sistem yang tidak terusik diberi oleh persamaan (Gasiorowic 1974)

$$\hat{H}_o\phi_n^o = E_n^o\phi_n^o$$

di mana $\hat{H}_o\phi_n^o$ dan E_n^o adalah operator fungsi eigen dan nilai eigen yang unggul di mana penyelesaian diketahui. Maka bagi sistem yang terusik ia boleh ditulis seperti berikut :

$$\hat{H}\phi_n = E_n\phi_n$$

dimana $\hat{H} = \hat{H}_o + \hat{H}'$

$\hat{H}'$ = operator usikan.

Dengan mengembangkan ϕ_n di dalam siri ϕ_m^o iaitu

$$\phi_n = \sum_m a_{nm}\phi_m^o \ldots (6)$$

Maka perubahan nilai eigen keperingkat pertama yang terhasil disebabkan oleh usikan H' diberi oleh persamaan

$$E_n' = \int\phi_n^* H'\phi_n d\tau = \langle n|H'|n\rangle = H_{nn} \ldots (7)$$

dan

$$a_{nm} = \frac{\langle m|H'|n\rangle}{E_n^o - E_m^o} \ldots (8)$$

Ini adalah hasil piawai dari teori usikan ke peringkat pertama bagi sistem yang tidak degenerat.

3.2 Teori Usikan ke atas Kes Degenerat.

Untuk sistem yang degenerat pula, fungsi eigen yang tidak terusik terdiri daripada gabungan linear fungsi-fungsi eigen yang degenerat tersebut. Iaitu (Anderson 1971)

$$\phi^{o}_{n} = \sum_{i=1}^{N} V_{ni} \phi^{o}_{n_i}$$

di mana N adalah bilangan kedegeneratan. V_{ni} adalah pekali yang memperihalkan nisbah gabungan ϕ^{o}_{i} di antara satu sama lain. Dengan mengembangkan ϕ_n, fungsi eigen yang terusik di dalam sebutan ϕ^{o}_{n} maka kita dapati persamaan berikut :

$$\left(E^{o}_{m} - E^{o}_{n}\right) V_{me} b_{nm} = E'_{n} V_{ne} \delta_{mn}$$
$$-\sum_{i} V_{ni} < m, \; e|H'|n, \; i>$$

di mana b_{nm} adalah pekali untuk sebutan ϕ^{o}_{m} di dalam pengembangan ϕ_n. Dari persamaan di atas, perhatikan apabila m = n

$$E'_{n} V_{nl} - \sum_{i}^{N} V_{ni} < n, \; e|H'|n, \; i> = 0$$

Persamaan (8) adalah persamaan matrik. Untuk sistem berdegenerat gandadua, persamaan (8) boleh ditulis di dalam bentuk

$$E'_{n} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix}$$

di mana $a_{ij} = < n, \; i|H'|n \; j>$. Persamaan di atas boleh dipermudahkan kepada

$$\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{ii} - E'_{n} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - E'_{n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} \ldots (9)$$

Persamaan (9) hanya benar apabila determinan

$$\begin{vmatrix} a_{11} - E'_{n} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} - E'_{n} \end{vmatrix} = 0$$

Yang mana ini bererti

$$2E'_{n} = a_{11} + a_{22}$$
$$\pm \sqrt{(a_{11} - a_{22})^{2} + 4a_{12}a_{21}} \ldots (10)$$

Persamaan (10) memberi perubahan nilai eigen keperingkat pertama. Sementara E'_{n} mempunyai dua nilai, yaitu

$$2E'^{1}_{n} = a_{11} + a_{22}$$
$$+ \sqrt{(a_{11} - a_{22})^{2} + 4a_{12}a_{21}} \ldots (11a)$$

$$2E'^{2}_{n} = a_{ii} + a_{22}$$
$$-\sqrt{(a_{11} - a_{22})^{2} + aa_{12}a_{21}} \ldots (11b)$$

Dari persamaan (9), dengan mengambil V_{n2} = 1, maka kita dapati

$$V_{nl} = \frac{-a_{12}}{(a_{11} - E'_{n})} \ldots (12a)$$

Oleh itu vektor eigennya ialah

$$\begin{bmatrix} V_{n1} \\ V_{n2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\dfrac{a_{12}}{a_{11} - E'_{n}} \\ 1 \end{bmatrix} \ldots (12b)$$

eigenvektor di atas tidak dinormalkan. Dua nilai memberi dua nilai eigenvektor.

4. USIKAN JISIM KE ATAS SELAPUT BERGETAR

4.1 Menentukan Operator Usikan

Getaran di atas selaput pada satu-satu ketika diwakilkan oleh persamaan (4), iaitu

$$-\frac{T}{\rho} \nabla^{2} \phi(x, y) = \omega^{2} \phi(x, y) \ldots (4)$$

Persamaan di atas adalah untuk taburan jisim ke atas permukaan selaput yang sekata. Katakan ρ tidak lagi sekata, sebaliknya terdiri dari dua sebutan iaitu

$$\rho \rightarrow \rho + \rho'(x, y)$$

di mana ρ disebutan pertama menunjukkan taburan jisim yang sekata dan sebutan kedua menunjukkan perbezaan taburan jisim yang bergantung pada kedudukan iaitu ρ'(x, y). Diandaikan bahawa ρ'(x, y)«ρ. Oleh itu sebutan

$$\frac{T}{\rho} \rightarrow \frac{T}{\rho + \rho'(x, y)}$$

yang mana dengan menggunakan pengembangan binomial ia boleh ditulis dalam bentuk

$$\frac{T}{\rho + \rho'(x, y)} = \frac{T}{\rho} \left[1 - \frac{\rho'(x, y)}{\rho} - \frac{\rho'^{2}(x, y)}{\rho^{2}} + \ldots \right]$$

dengan mengabaikan sebutan yang lebih besar dari peringkat kedua ke atas

$$\frac{T}{\rho + \rho'(x, y)} = \frac{T}{\rho} \left[1 - \frac{\rho'(x, y)}{\rho} \right]$$

Oleh sebab itu operator eigen $H_o \rightarrow H$

di mana $H = H_o + H' = \frac{-T}{\rho + \rho'(x,y)}\nabla^2$

$$= -\frac{T}{\rho}\nabla^2 + \frac{\rho'(x,y)}{\rho}\frac{T}{\rho}\nabla^2$$

$$= H_o - \frac{\rho'(x,y)}{\rho}H_o$$

dimana $H_o = -\frac{T}{\rho}\nabla^2$

dan $H' = -\rho'(x,y)/\rho H_o \ldots (13)$

4.2 Usikan Jisim Titik ke atas Kes Tak Degenerat.

Dengan menggunakan operator usikan H' seperti persamaan (13) dan memasukkannya ke dalam persamaan (7), maka perubahan nilai eigen boleh didapati yaitu

$$E'_n = \int_0^a\int_0^a \phi^*_{mm}(x,y)H'\phi_{mm}(x,y)\,dx\,dy$$

Adakan sedikit perubahan tatatanda

$$= \langle m, m|H'|m, m\rangle$$

$$= \langle m, m\left|-\frac{\rho'(x,y)}{\rho}H_o\right|m, m\rangle$$

tetapi $H_o|m, n\rangle = -\omega^2_{0,mn}|m, n\rangle$

$$\Delta\omega^2_{nm} = \omega^2_{0,mn}\langle m, m\left|\frac{\rho'(x,y)}{\rho}\right|m, m\rangle \ldots (14)$$

Persamaan (14) mengatakan bahawa perubahan frequensi akan berlaku andainya se-butan $\langle m, m\left|\frac{\rho'(x,y)}{\rho}\right|m, m\rangle \neq 0$. Ia adalah positif jika ρ(x, y) adalah positif (iaitu penambahan jisim) dan adalah negatif jika ρ(x, y) adalah negatif (iaitu pengurangan jisim).

Perhatikan sebutan

$$D = \langle m, m\left|\frac{\rho'(x,y)}{\rho}\right|m, m\rangle$$

$$= \frac{1}{\rho}\langle m, m|\rho'(x,y)|m, m\rangle$$

$$= \frac{1}{\rho}\int_0^L\int_0^L \phi^*_{m,m}\rho'(x,y)\phi_{m,m}\,dx\,dy$$

Dari persamaan (5)

$$D = \frac{4}{L^2}\int_0^L\int_0^L \rho'(x,y)\sin^2 m\frac{\pi x}{L}\sin^2 m\frac{\pi y}{L}\,dx\,dy$$

Andainya $\rho'(x,y) = \rho'_x(x)\rho'_y(y)$ maka

$$D = \frac{4}{\rho L^2}\int_0^L \rho'(x)\sin^2 m\frac{\pi x}{L}dx$$

$$\int_0^L \rho'(y)\sin^2 m\frac{\pi y}{L}dy \ldots (15)$$

Katakan ρ'(x, y) adalah jisim titik yang berada pada titik (x_o, y_o) maka;

$$\rho'(x,y) = \mu\delta(x-x_o)\delta(u-y_o) \ldots (16)$$

dengan $\delta(x - x_o)$ dan $\delta(y - y_o)$ sebagai fungsi delta Dirac, dan μ sebagai jisim usikan.

maka persamaan (15) menjadi

$$D = \frac{4\mu}{\rho L^2}\int_0^L \delta(x-x_o)\sin^2 m\frac{ax}{L}dx$$

$$\int_0^L \delta(y-y_o)\sin^2 n\frac{\pi y}{L}dy$$

$$D = \frac{4\mu}{\rho L^2}\sin^2 m\frac{\pi x_o}{L}\sin^2 n\frac{\pi y_o}{L}$$

tetapi $\rho L^2 = M$, yaitu jisim keseluruhan selaput tersebut

$$D = \frac{4\mu}{M}\sin^2 m\frac{\pi x_o}{L}\sin^2 m\frac{\pi y_o}{L}$$

Oleh sebab itu perubahan frequensi berlaku sepertimana yang diberi oleh persamaan (14) i.e.

$$\Delta\omega^2_{mm} = \frac{4\mu}{M}\omega^2_{o,mm}\sin^2 m\frac{\pi x_o}{L}\sin^2 m\frac{\pi y_o}{L}$$

Persamaan di atas mempunyai nilai maksimum bila jisim usikan tersebut diletak di mana nilai

$$\sin^2 m\frac{\pi x_o}{L}\sin^2 n\frac{\pi y_o}{L} = 1$$

Iaitu di titik antinod dan tidak akan berlaku sebarang perubahan frekuensi andainya jisim tersebut diletak pada garisan nod. Nilai perubahan frequensi ialah

$$\Delta\omega_{mm} = 2\omega_{o,mm}\sqrt{\frac{\mu}{M}}\sin m\frac{\pi x_o}{L}\sin m\frac{\pi y_o}{L}$$

Dengan kata lain semakin tinggi mod getaran, semakin besarlah perubahan frekuensi yang berlaku, makin besar nisbah jisim usikan dengan jisim keseluruhan, dan semakin besar jugalah perubahan frekuensi.

Tetapi

$$\frac{\Delta\omega_{mm}}{\omega_{o,mm}} = 2\sqrt{\frac{\mu}{M}}\,.\,\omega_{o,mm}\ _n\sin m\frac{\pi x_o}{L}\sin m\frac{\pi y_o}{L}$$

iaitu perbezaan pecahan bagi setiap mod getaran hanyalah bergantung pada nisbah jisim usikan dengan jisim keseluruhan sahaja.

Sementara perubahan bentuk untuk fungsi eigen diberi oleh persamaan

$$|m,\ m> = |m,\ m>^{\circ} + \sum_{\substack{n,k\\ n\neq m\\ k\neq m}} a_{nk,mm}|n,\ k> \ldots(17)$$

dimana $a_{nk,mm} = \dfrac{<n,k|H'|m,\ m>}{E^o_{mm} - E^o_{nk}}$ (lihat persamaan 8).

Oleh sebab itu

$$a_{nk,mm} = <n,\ k\left|-\frac{(x,y)}{\rho}H_o\right|m,\ m>$$

$$= \frac{\omega^2_{o,mm}}{\rho} <n,\ k|-\rho(x,y)|m,\ m>$$

Untuk jisim titik seperti persamaan (16)

$$= \frac{4\mu}{\rho L^2}\omega^2_{o,mm} <n,\ k|\delta(x,x_o)(y-y_o)|m,\ m>$$

$$a_{nk,mm} = \frac{4\mu}{\rho L^2}\omega^2_{o,mm}\sin n\frac{\pi x_o}{L}\sin k\frac{\pi y_o}{L}$$

$$\sin m\frac{\pi x_o}{L}\sin m\frac{\pi y_o}{L}$$

Dengan memasukkan nilai $a_{nk,mm}$ ke dalam persamaan (17), maka siri untuk mode m,m yang terusik diperolehi. Didapati bentuk getaran adalah berubah sepertimana yang terdapat dalam rajah (2a), di mana (1a) adalah bentuk getaran untuk mode (2, 2) tanpa usikan dan (2a) adalah bentuk getaran untuk mod (2,2) dengan usikan $\frac{\mu}{M} = 0.13$ berada pada titik antinod (0.25, 0.25) untuk L = 1. Sementara (2b) ialah kontornya.

4.3 Usikan Jisim Titik ke atas Kes Degenerat.

Perubahan kepada peringkat pertama pada nilai eigen untuk kes degenerat diberi oleh persamaan (10) iaitu

$$E'_n = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm\sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4} + a_{12}a_{21}} \ldots(10)$$

di mana $a_{ij} = <n,\ i|H'|n,\ j>$ untuk $i, j = 1, 2$.

Persamaan (10) menunjukkan bahawa nilai eigen yang degenerat akan berpecah pada dua nilai baru. Iaitu

$$E = E^o_n + E'^1_n \quad \text{dan} \quad E = E^o_n + E'^2_n$$

Dengan menggunakan H' sebagaimana persamaan (13), maka a_{ij} dapat dinilaikan, iaitu

$$a_{ij} = <n,\ i\left|-\frac{\rho(x,y)}{\rho}H_o\right|n,\ j>$$

dengan mengadakan perubahan tanda

$$a^{nk}_{ij} = <nk,\ i\left|-\frac{\rho(x,y)}{\rho}H_o\right|nk,\ j>$$

$$a^{nk}_{ij} = \frac{\omega^2_{o,nk}}{\rho} <nk,\ i|\rho(x,y)|nk,\ j>$$

$$a^{nm}_{11} = \frac{4\omega^2_{o,nm}}{L^2\rho}\int_0^L\int_0^L \rho(x,y)\sin^2 n\frac{\pi x}{L}$$

$$\sin^2 k\frac{\pi y}{L}dx\ dy \ldots(18a)$$

$$a^{nm}_{21} = a^{nm}_{12} = \frac{4\omega^2_{o,n}}{L^2}\int_0^L\int_0^L \rho(x,y)\sin\ n\frac{\pi x}{L}$$

$$\sin k\frac{\pi y}{L}\sin k\frac{\pi x}{L}\sin n\frac{\pi y}{L}dx\ dy \ldots(18b)$$

$$a^{nm}_{22} = \frac{4\omega^2_{o,nk}}{L^2\rho}\int_0^L\int_0^L \rho(x,y)$$

$$\sin^2 k\frac{\pi x}{L}\sin^2 n\frac{\pi y}{L}dxdy \ldots(18c)$$

Oleh sebab itu persamaan (10) menjadi

$$E'_n = \frac{a_{11} + a_{22}}{2} \pm\sqrt{\frac{(a_{11} - a_{22})^2}{4}} \ldots(10b)$$

untuk jisim titik $\rho(x,y) \Rightarrow \mu\delta(x - x_o)$ $\delta(y - y_o)$

Maka persamaan (18) menjadi

$$a^{nm}_{11} = \frac{4\mu\omega^2_{o,nm}}{M}\sin^2 n\frac{\pi x_o}{L}\sin^2 k\frac{\pi y_o}{L} \ldots(19a)$$

$$a^{nm}_{21} = a^{nm}_{12} = \frac{4\mu\omega^2_{o,nm}}{M}\sin n\frac{\pi x_o}{L}\sin k\frac{\pi y_o}{L}$$

$$\sin k\frac{\pi x_o}{L}\sin n\frac{\pi y_o}{L} \ldots(19b)$$

$$a_{22}^{nm} = \frac{4\mu\omega_{o,nm}^{2}}{M}\sin^{2} k\frac{\pi x_{o}}{L}\sin^{2} n\frac{\pi y_{o}}{L} \ldots (19c)$$

Perhatikan $\frac{a_{11}^{nm}}{a_{22}^{nm}} = \frac{\sin^{2} n\frac{\pi x_{o}}{L}\sin^{2} k\frac{\pi y_{o}}{L}}{\sin^{2} k\frac{\pi x_{o}}{L}\sin^{2}\frac{\pi y_{o}}{L}}$

$$= \alpha^{2} \ldots (20a)$$

maka $\frac{a_{12}^{nm}}{a_{22}^{nm}} = \alpha \ldots (20b)$

yaitu $a_{11}^{nm} = \alpha_{nm}^{2} a_{22}^{nm}$

dan $a_{12}^{nm} = \alpha_{nm} a_{22}^{nm}$

maka persamaan (10b) menjadi

$$E_{n} = \frac{a_{22}(\alpha_{nm}^{2}+1) \pm a_{22}(\alpha_{nm}^{2}+1)}{2}$$

$$= \frac{a_{22}(\alpha_{nm}^{2}+1)(1 \pm 1)}{2}$$

yaitu $E_{n}^{1} = 0$ ataupun $E_{n}^{2} = a_{22}(\alpha_{nm}^{2}+1) \ldots (21)$

Dengan kata lain, apabila diletakkan usikan jisim titik ke atas selaput, maka nilai eigen akan berpecah pada dua nilai, sama ada

$$E_{n} = E_{n}^{''} \quad \text{ataupun} \quad E_{n} = E_{n}^{''} + a_{22}(\alpha^{2}+1)$$

Perhatikan $E_{n}^{2} = a_{22}(\alpha_{nm}^{2}+1)$

$$= a_{22}\alpha_{nm}^{2} + a_{22}$$

dari (19b) dan (20a)

$$\Delta\omega_{nm}^{2} = \frac{4\mu\omega_{o,nm}^{2}}{M}\left(\sin^{2} n\frac{\pi x_{o}}{L}\sin^{2} k\frac{\pi y_{o}}{L} + \sin^{2} k\frac{\pi x_{o}}{L}\sin^{2} n\frac{\pi y_{o}}{L}\right) \ldots (22)$$

disebabkan sebutan di sebelah kanan adalah gandadua, oleh itu adalah sentiasa positif, maka E_{n}^{2} sentiasa positif.

E_{n}^{2} sama dengan sifar hanya apabila

$\sin n\frac{\pi x_{o}}{L} = \sin k\frac{\pi x_{o}}{L} = 0$ atau $\sin n\frac{\pi x_{o}}{L} = \sin n\frac{\pi y_{o}}{L} = 0$ atau $\sin k\frac{\pi y_{o}}{L} = \sin k\frac{\pi x_{o}}{L} = 0$ atau $\sin k\frac{\pi y_{o}}{L} = \sin n\frac{\pi y_{o}}{L} = 0$

Iaitu satu syarat di mana usikan tersebut tidak menyebabkan simmetri sistem tersebut terturun.

Sementara perubahan bentuk untuk fungsi eigen ke peringkat sifar diberi oleh persamaan

$$\phi_{n} = V_{n1}\phi_{n,1}^{''} + V_{n2}\phi_{n,2}^{''}$$

Dengan mengambil $V_{n2} = 1$, dan dari persamaan (12a), ia menjadi

$$\phi_{n}^{(1)} = -a_{12}^{nk}/\left(a_{11}^{nk} - E_{n}^{(1)}\right)\phi_{n,1}^{''} + \phi_{n,2}^{''}$$

$$\phi_{n}^{(2)} = -a_{12}^{nk}/\left(a_{11}^{nk} - E_{n}^{(2)}\right)\phi_{n,1}^{''} + \phi_{n,2}^{''}$$

tetapi $E_{n}^{(1)} = 0 \quad a_{12}^{nk} = \alpha_{nm} a_{22}^{nk}$ dan $a_{11} = \alpha_{nk}^{2} a_{22}^{nk}$

maka $\phi_{n}^{(0)} = \frac{-\alpha_{nk} G_{22}^{nk}}{\alpha_{nk}^{2} a_{22}^{nk}}\phi_{n,1}^{''} + \phi_{n,2}^{''}$

$$\phi_{n}^{(1)} = \phi_{n,2}^{''} - \frac{\phi_{n,1}^{''}}{\alpha_{nk}} \ldots (23a)$$

Dari (21) maka

$$\phi_{n}^{(2)} = \frac{-\alpha_{nk} a_{22}^{nk}}{\alpha_{nk}^{2} a_{22}^{nk} - a_{22}^{nk}(\alpha_{nk}^{2}+1)}\phi_{n,1}^{''} + \phi_{n,2}^{''}$$

$$\phi_{n}^{(2)} = \phi_{n,2}^{''} + \alpha_{nm}\phi_{n,1}^{''} \ldots (24a)$$

Dan $\phi_{n}^{(2)}\left|\phi_{n}^{(1)}\right> = 0$ iaitu dua fungsi eigen yang terhasil adalah berortogan di antara satu sama lain.

Nisbah percampuran $\phi_{n,2}^{''}$ dan $\phi_{n,1}^{''}$ di dalam $\phi_{n}^{(i)}$ ditentukan oleh sebutan

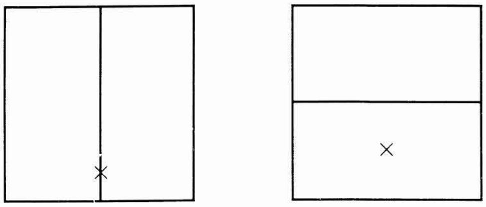
$$\alpha = \frac{\sin k\frac{\pi x_{o}}{L}\sin n\frac{\pi y_{o}}{L}}{\sin n\frac{\pi x_{o}}{L}\sin k\frac{\pi y_{o}}{L}}$$

$\alpha = 0$ bila $\sin k\frac{\pi x_{o}}{L} = 0$ ataupun $\sin n\frac{\pi y_{o}}{L} = 0$. Apabila α sifar, maka

$$\alpha_{n}^{(2)} = \phi_{n,2}^{(0)}$$

iaitu selaput tersebut bergetar dengan mod $\phi_{n,2}^{(0)}$ dan kedudukan jisim titik ialah pada garisan nod untuk mod $\phi_{n,1}^{(0)}$.

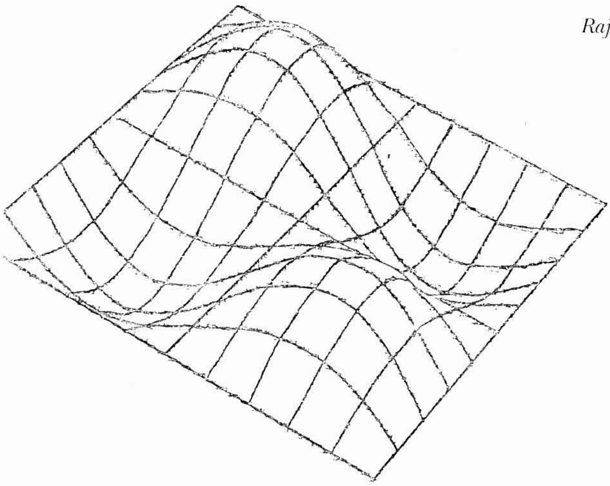
Sementara untuk kes yang tiada perubahan tenaga iaitu $\phi_{n}^{(1)}$ ia adalah sama dengan mode $\phi_{n,1}^{(0)}$ (lihat rajah 2).



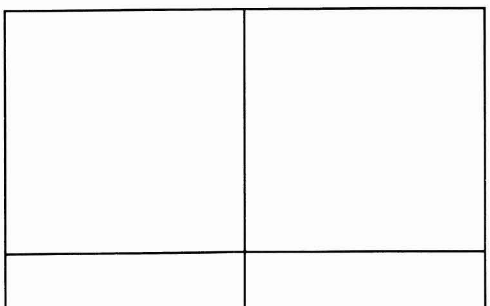
$(a)\quad \alpha = 0:\ \phi^{(0)}_{n,2}$ $\qquad (b)\quad \alpha = 0:\ \phi^{(1)}_{n,1}$

ajah 2: $\displaystyle \phi^{''}_{n,2} = \frac{2}{L}\sin 2\frac{\pi x}{L}\sin n\frac{\pi y}{L}$

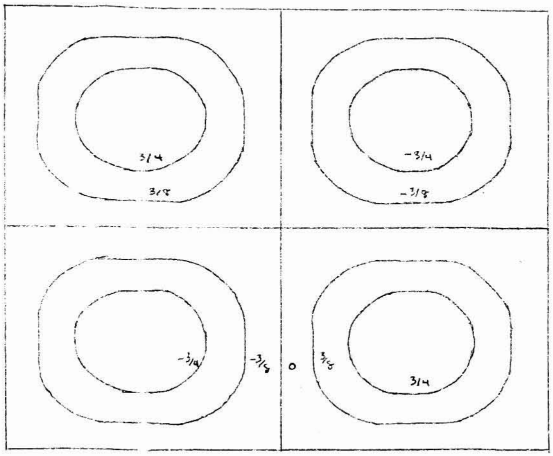
$$\phi^{''}_{n,1} = \frac{2}{L}\sin \frac{\pi x}{L}\sin 2\frac{\pi y}{L}$$



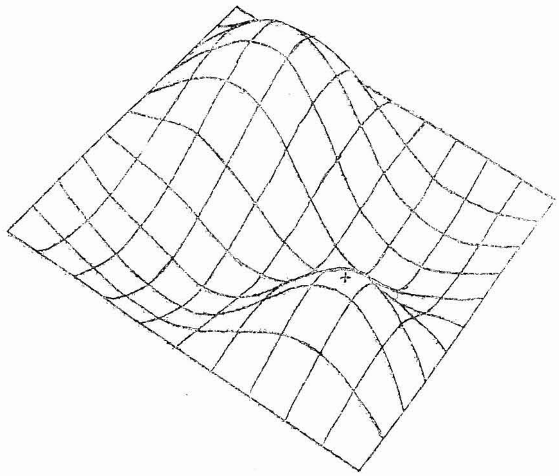
'ajah 1a. *Bentuk getaran untuk mode m = 2, n = 2, tanpa sikan.*



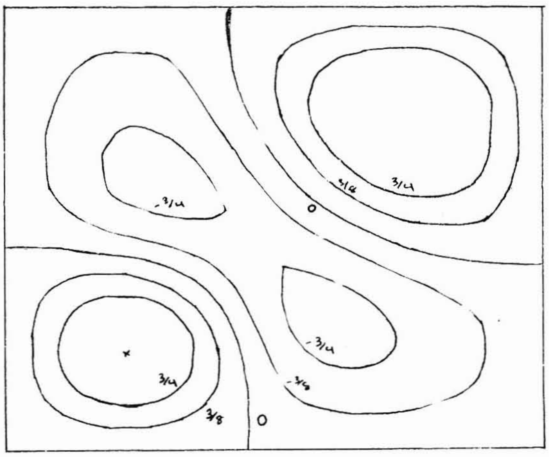
'ajah 1b. *Bentuk garis nod untuk mode m = 2, n = 2.*



Rajah 1c. Kontor untuk getaran mod m = 2, n =2, tanpa usikan.



*Rajah 2a. Bentuk getaran untuk mod m = 2, n = 2 dengan usikan * = 0.13 berada pada titik (0.25, 0.25)*



*Rajah 2b. Kontor untuk getaran bagi mode m = 2, n = 2, dengan usikan * = 0.13 berada pada titik (0.25, 0.25)*

4. KESIMPULAN

Kajian getaran ke atas selaput di atas menunjukkan bahawa andainya selaput tidak sekata, maka bentuk getaran yang terhasil akan berubah. Ini juga merubahkan frekuensi sistem tersebut. Kalaulah jisim usikan itu merupakan penambahan jisim pada mana-mana titik, maka frekuensi yang terhasil sentiasa lebih rendah dari frekuensi bagi sistem tanpa usikan; tetapi sebaliknya jika pengurangan jisim yang berlaku.

5. PENGHARGAAN

Pihak pengarang ingin merakamkan terima kasih kepada ahli-ahli Jabatan Fizik UPM yang memberikan cadangan-cadangan yang baik dan teguran-teguran yang membina terutamanya Prof. Madya Dr. Mohd. Yusuf Sulaiman.

RUJUKAN

PAIN, H.J. 1975. *The Physics of Vibrations and Waves.* Great Britain: Unwin Brothers Ltd.

SRINIVASAMN P. 1982. *Mechanical Vibrations Analysis.* New Delhi: Tata-McGraw-Hill Publishing Company Ltd.

GASIOROWIC S. 1974. *Quantum Physics.* United States of America : John-Wiley Sons.

ANDERSON E.E. 1971. *Modern Physics and Quantum Mechanics.* Philiadelphia: W.B. Saunders Company.

(Received 29 January, 1988)