Pertanika 11(3), 475-481 (1988)

Pengubahsuaian Bentuk Selang Kecerunan Dalam Kaedah Newton bagi Suatu Kelas Fungsi Satu Pembolehubah

The Improved Interval Forms of the Gradient in Newton's Method for a Class of Functions with One Variable

ISMAIL BIN MOHD
Jabatan Matematik,
Fakulti Sains dan Pengajian Alam Sekitar,
Universiti Pertanian Malaysia,
43400 Serdang, Selangor Darul Ehsan, Malaysia.

Kata punca: Kaedah Newton; aritmetik selang; bentuk tersarang.

ABSTRAK

Bentuk terubahsuai kaedah Newton selang yang dihuraikan oleh Hansen (Hansen, 1978b) untuk mengira dan membatasi pensifar $f:R^1 \to R^1$ *adalah diberikan. Untuk meningkatkan sifat-sifat penumpuan kaedah-kaedah itu, bentuk tersarang digunakan untuk mengira dan membatasi terbitan* $f': R^1 \to R^1$.

ABSTRACT

Improved forms of some interval Newton methods which are described by Hansen (Hansen, 1978b) for computing and bounding the zeros of $f:R^1 \to R^1$ *are given. In order to improve the convergence properties of the methods, the nested form has been used for computing and bounding the derivative* $f': R^1 \to R^1$.

1. PENGENALAN

Sudah menjadi pengetahuan umum di kalangan cendikiawan matematik bahawa kaedah Newton dapat digunakan untuk mencari pensifar nyata persamaan

$$f(x) = 0 \tag{1.1}$$

dengan diberinya fungsi $f : D \subseteq R^1 \to R^1$.

Moore (Moore, 1966) menggunakan aritmetik selang kepada kaedah Newton dalam menyelesaikan persamaan (1.1) dan penumpuannya telah dihuraikan oleh Nickel (Nickel, 1971). Hansen (Hansen, 1987b) menunjukkan bahawa dengan penggantian beberapa selang tertentu dalam kaedah Moore tadi akan meningkatkan kadar penumpuan kaedah Newton selang.

Dalam makalah ini pengubahsuaian kaedah Hansen tadi dihuraikan dan dalam perbincangan ini kita hanya mempertimbangkan fungsi-fungsi polinomial sahaja.

2. TATATANDA

Selang $\underline{x} = [x_I, x_S] = \{x \in R^1 \mid x_I \leqslant x \leqslant x_S;\ x_I, x_S \in R^1\}$ jadi $\underline{x} = [x_I, x_S]$ dengan masing-masing x_I dan x_S disebut influmum dan supremum. Tandakan set

$$I(R^1) = \{\underline{x} = [x_I, x_S] \mid x_I\, x_S \in R^1;\ x_I \leqslant x_S\}$$

Pemetaan-pemetaan lebar $w(\,.\,) : I(R^1) \to R^1$ dan titik tengah $m(.) : I(R^1) \to R^1$ masing-masingnya ditakrif oleh

$$w(\underline{x}) = x_S - x_I, \tag{2.1}$$

dan

$$m(\underline{x}) = (x_I + x_S)/2 \tag{2.2}$$

Operasi aritmetik peraduaan +, –, ., / ditakrif kepada set $I(R^1)$ sebagai

$$\underline{x} * \underline{y} = \{x * y \mid x \in \underline{x}, y \in \underline{y}\} \tag{2.3}$$

$(\underline{x}, \underline{y} \in I(R^1))$ dan $* \in \{+, -, ., /\}$ kecuali $\underline{x}/\underline{y}$ tak tertakrif jika $0 \in \underline{y}$. Penjelasan mengenai (2.3) diberikan dalam (Mohd, 1987b).

Persilangan antara $\underline{x}$ dan $\underline{y}$ kepunyaan $I(R^1)$ ditakrif oleh

$$\underline{x} \cap \underline{y} = \begin{cases} \emptyset & ((x_S < y_I) \text{ atau } (y_S < x_I)) \\ [\text{maks } \{x_I, y_I\},\ \text{minim } \{x_S, y_S\}] & \text{selainnya} \end{cases} \tag{2.4}$$

Selang $\underline{x} \in I(R^1)$ disebut menyusut jika dan hanya $x_I = x_S$. Jadi selang menyusut berbentuk $[x, x]$ ($\forall x \in R^1$).

Jika $0 \in \underline{x}$ dan n integer genap positif maka

$$\underline{x}^n = [0, \text{maks}\{x_I^n, x_S^n\}]. \qquad (2.5)$$

3. PERLUASAN SELANG

Katakan diberi fungsi f: $D \subseteq R^1 \to R^1$ dan $f \in C^1(D)$. Pemetaan $\bar{f}: I(D) \to I(R^1)$ bagi f ditakrif oleh

$$\bar{f}(\underline{x}) = \{f(x) \mid x \in \underline{x};\ \underline{x} \in I(D)\} \qquad (3.1)$$

disebut perluasan seseunit bagi f.

Katakan $\underline{f}: I(D) \to I(R^1)$ perluasan selang bagi $f: D \to R^1$, maka f dikatakan berekanada rangkuman jika dan hanya jika ($\underline{x} \subset \underline{y} \in I(D)$) mengimplikasikan ($\underline{f}(\underline{x}) \subset \underline{f}(\underline{y})$). Jelas $\bar{f}$ yang ditakrif oleh (3.1) satu perluasan selang berekanada rangkuman.

Fungsi selang nisbah $\underline{f}_A: I(D) \to I(R^1)$ yang diperoleh daripada ungkapan nyata nisbah fungsi f menerusi penggantian semua $x \in R$ dalam ungkapan f(x) dengan $\underline{x} \in I(R)$ dan aritmetik nyata dalam f(x) dengan aritmetik selang disebut perluasan selang asli bagi f.

4. BENTUK TERSARANG

Katakan fungsi f: $D \subseteq R^1 \to R^1$ ditakrif oleh

$$f(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0 \qquad (4.1)$$

dan bentuk tersarang bagi f(x) seperti berikut

$$f(x) = (\ldots(((a_n x + a_{n-1})x + a_{n-2})x + a_{n-a})x + \ldots + a_1)x + a_0. \qquad (4.2)$$

Perluasan selang $\underline{f}_S: I(D) \to I(R^1)$ bagi f yang ditakrif oleh (4.2) diberi oleh

$$\underline{f}_S(\underline{x}) = (\ldots(((a_n\underline{x} + a_{n-1})\underline{x} + a_{n-2})\underline{x} + a_{n-3})\underline{x} + \ldots + a_1)\underline{x} + a_0; \qquad (4.3)$$

sedangkan perluasan selang $\underline{f}_A: I(D) \to I(R^1)$ bagi f diperoleh menerusi (4.1), iaitu

$$\underline{f}_A(\underline{x}) = a_n\underline{x}^n + a_{n-1}\underline{x}^{n-1} + \ldots + a_1\underline{x} + a_0. \qquad (4.4)$$

Telah dibuktikan (Moore, 1966) bahawa

$$\underline{f}_S(x)) + \underline{f}_A(\underline{x}) \qquad (4.5)$$

sehingga diperoleh

$$w(\underline{f}_S(\underline{x})) \leqslant w(\underline{f}_A(\underline{x})) \qquad (4.6)$$

5. KAEDAH NEWTON SELANG

Katakan diberi $f: D \subseteq R^1 \to R^1$ dengan $f \in C^1(D)$. Jika $\underline{x} \in I(D)$ maka ($\forall$ x, $y \in \underline{x}$) wujud $\xi \in \underline{x}$ sehingga

$$f(y) = f(x) + f'(\xi)(y-x) \qquad (5.1)$$

Misalkan $\underline{f}': I(D) \to I(R^1)$ perluasan selang berekanada rangkuman bagi $f': D \to R^1$. Oleh kerana $\underline{x}$ padat jadi $\underline{x}$ cembung dan $\xi \in \underline{x}$. Justeru itu

$$f(y) \in f(x) + \underline{f}'(\underline{x})(y-x) \qquad (5.2)$$

Jika $y \in \underline{x}$ pensifar nyata bagi f dalam $\underline{x}$ maka f(y) = 0, jadi y memenuhi

$$f(x) + f'(\xi)(y-x) = 0 \qquad (5.3)$$

untuk $\xi \in \underline{x}$. Jadi sebarang pensifar $y \in \underline{x}$ terkandung dalam set

$$D' = \{y \mid f(x) + \underline{f}'(\xi)(y-x) = 0\} \qquad (5.4)$$

Kita akan mencari $\underline{y} \in I(R^1)$ sehingga $D' \subseteq \underline{y}$.

Jika kita takrifkan $\underline{y} \in I(R^1)$ sebagai

$$\underline{y} = x - f(x)/\underline{f}'(\underline{x}) \qquad (5.5)$$

maka $0 \notin \underline{f}'(\underline{x})$ mengimplikasikan $D' \subseteq \underline{y}$ seterusnya menerbitkan kaedah Newton selang yang terdiri daripada penjanaan jujukan $(\underline{x}^{(k)})$ daripada

$$\underline{y}^{(k)} = x^{(k)} - f(x^{(k)})/\underline{f}'(\underline{x}^{(k)}) \qquad (5.6a)$$

$$\underline{x}^{(k+1)} = \underline{x}^{(k)} \cap \underline{y}^{(k)} \quad (k \geqslant 0) \qquad (5.6b)$$

dengan $x^{(k)}$ biasanya sama dengan $m(\underline{x}^{(k)})$ dan $\underline{x}^{(0)} = \underline{x}$.

Jika $0 \in \underline{f}'(\underline{x})$, D' masih boleh dibatasi seperti ditunjuk dalam (Mohd, 1987a).

6. PROSES PENGUBAHSUAIAN HANSEN

Katakan kuasa kepada pembolehubah x dalam ungkapan f(x) lebih besar dari satu. Gantikan satu x atau lebih dengan x_1 dan bakinya dengan x_2. Jika ungkapan baru ditandai $g(x_1, x_2)$ maka untuk $x = x_1 = x_2$ diperoleh

$$g(x_1, x_2) = g(x, x) = f(x) \qquad (6.1)$$

Menurut kembangan Taylor ($\forall x_1, y_1 \in \underline{x}_1$) dan ($\forall x_2, y_2 \in \underline{x}_2$) wujud $\xi_1 \in \underline{x}_1$ dan $\eta_2 \in \underline{x}_2$ sehingga

$$g(y_1, y_2) = g(x_1, x_2) + (y_1 - x_1)\frac{\partial}{\partial x_1} g(\xi_1, x_2) +$$

$$(y_2 - x_2)\ \frac{\partial}{\partial x_2}\ g(y_1, \eta_2) \qquad (6.2)$$

Jika $x_1 = x_2 = x$ dan $y_1 = y_2 = y$ maka

$$g(y, y) = g(x, x) + (y - x)\left\{\frac{\partial}{\partial x_1} g(\xi_1, x) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(y_1, \eta_2)\right\} \qquad (6.3)$$

sehingga menerusi (6.1) diperoleh

$$f(y) = f(x) + (y - x)\left\{\frac{\partial}{\partial x_1} g(\xi_1, x) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(y_1, \eta_2)\right\} \qquad (6.4)$$

Jika y pensifar nyata bagi f maka $f(y) = 0$ dan menerusi (6.4) diperoleh

$$y = x - \frac{f(x)}{\frac{\partial}{\partial x_1} g(\xi_1, x) + \frac{\partial}{\partial x_2} g(y_1, \eta_2)} \qquad (6.5)$$

Jika $x \in \underline{x}$ dan $y \in \underline{x}$ maka $\xi_1, \eta_2 \in \underline{x}$ dan pensifar nyata y terkandung dalam selang

$$\underline{N}(\underline{x}) = x - \frac{f(x)}{\frac{\partial}{\partial x_1}\underline{g}(\underline{x}_{11}, x) + \frac{\partial}{\partial x_2}\underline{g}(\underline{x}_{21}, \underline{x}_{22})} \qquad (6.6)$$

dengan $\underline{x}_{11}$, $\underline{x}_{21}$, $\underline{x}_{22}$ sama dengan $\underline{x}$. Namun begitu kita masih menggunakan tatatanda $\underline{x}_{11}$, $\underline{x}_{21}, \underline{x}_{22}$ untuk menyatakan yang mereka merdeka serta masing-masingnya membatasi ξ_1, y_1 dan η_2.

Sekarang jika kuasa bagi x dalam ungkapan f(x) lebih besar atau sama dengan m maka kita dapat menggantikan f(x) dengan $g(x_1, \ldots, x_m)$. Dengan cara yang sama seperti di atas diperoleh

$$\underline{N}_m(\underline{x}) = \underline{x} - f(x) / \underline{g}'(\underline{x}) \qquad (6.7)$$

dengan

$$\underline{g}'(x) = \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{g}(\underline{x}_{11}, x, \ldots, x) + \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{g}(\underline{x}_{21}, \underline{x}_{22}, x, \ldots x) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{g}(\underline{x}_{m1}, \ldots, \underline{x}_{mm}) \qquad (6.8)$$

dan $\underline{x}_{ij} = \underline{x}$ untuk i, j yang berkaitan. Dengan mengambil $\underline{N}(\underline{x}) = \underline{y}$ dalam (5.5) diperoleh

$$\underline{N}(\underline{x}) = x - f(x)/\underline{f}'(\underline{x}) \qquad (6.9)$$

Kaedah lelaran menggunakan (6.7) adalah seperti berikut: Mulai dengan $\underline{x}^{(0)} = \underline{x}$ janakan jujukan $(\underline{x}^{(k)})$ dari

$$\underline{x}^{(k)} = \underline{x}^{(k-1)} \cap \underline{N}_m(\underline{x}^{(k-1)}) \quad (k \geqslant 1) \qquad (6.10)$$

Nickel (Nickel, 1971) telah menunjukkan bahawa kaedah Newton selang satu matra yang diberi oleh (5.6) menumpu asalkan $0 \in f'(x)$ sedangkan untuk $0 \in f'(x)$ ditunjuk dalam (Mohd, 1987a) dan (Hansen, 1978a).

Sekarang dari (6.8) diperoleh

$$\begin{aligned}\underline{g}'(\underline{x}) &\subseteq \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{g}(\underline{x}_{11}, \underline{x}_{12}, \ldots, \underline{x}_{1m}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{g}(\underline{x}_{21}, \ldots, \underline{x}_{2m}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{g}(\underline{x}_{m1}, \ldots, \underline{x}_{mm}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{g}(\underline{x}, \ldots, \underline{x}) + \frac{\partial}{\partial x_2} \underline{g}(\underline{x}, \ldots, \underline{x}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{g}(\underline{x}, \ldots, \underline{x}) \\ &= \frac{\partial}{\partial x_1} \underline{f}(\underline{x}) + \ldots + \frac{\partial}{\partial x_m} \underline{f}(\underline{x}) \\ &= \underline{f}'(\underline{x})\end{aligned}$$

Justeru itu lebar selang (6.10) lebih kecil dari (5.6).

7. PROSES PENGUBAHSUAIAN TERSARANG

Katakan fungsi $f : D \subseteq R^1 \rightarrow R^1$ berbentuk polinomial

$$f(x) = \sum_{K=0}^{n} a_K x^K \qquad (7.1)$$

yang mempunyai pensifar nyata dalam $\underline{x}$. Kita mempunyai dua kes untuk dibincangkan di sini, iaitu kes-kes $0 \notin \underline{x}$ dan $0 \in \underline{x}$.

Katakan $0 \notin \underline{x}$ maka untuk $m \leqslant n$, $\underline{g}'(\underline{x})$ dibina menerusi (6.8). Oleh kerana f berbentuk polinomial dan $m \geqslant 2$ maka

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{g}(\underline{x}_{i1}, \ldots, \underline{x}_{ii}, x, \ldots, x) \tag{7.2}$$

seperti yang dinyatakan dalam (6.8), berbentuk polinomial juga sehingga $\underline{g}'(\underline{x})$ dapat diubah menjadi bentuk tersarang $\underline{g}_S'(\underline{x})$ seperti diterangkan dalam Bahagian 4. Dengan demikian

$$\underline{g}_S'(x) \subseteq \underline{g}'(\underline{x}) \tag{7.3}$$

dan

$$w(\underline{g}_S'(\underline{x})) \leqslant w(\underline{g}'(\underline{x})) \tag{7.4}$$

Jika $0 \in \underline{x}$ tulislah polinomial (7.1) menjadi

$$g(x_1, \ldots, x_m) = a_0 + a_1 x_1 + a_2 x_1 x_2 + \ldots + a_{m-1} x_1 \ldots x_{m-1} + \sum_{k=m}^{n} a_k x_1^{k-m+1} x_2 \ldots x_m \tag{7.5}$$

Terbitkan separa (7.5) sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x_1} g(x_1, \ldots, x_m) = a_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_{m-1} x_2 \ldots x_{m-1} + \sum_{k=m}^{n} a_k (k-m+1) x_1^{k-m} x_2 \ldots x_m .$$

$$\frac{\partial}{\partial x_2} g(x_1, \ldots, x_m) = a_2 x_1 + a_3 x_1 x_3 + \ldots + a_{m-1} x_1 x_3 \ldots x_{m-1} + \sum_{k=m}^{n} a_k x_1^{k-m+1} x_3 \ldots x_m ,$$

$$\ldots$$

$$\frac{\partial}{\partial x_{m-1}} g(x_1, \ldots, x_m) = a_{m-1} x_1 \ldots x_{m-2} + \sum_{k=m}^{n} a_k x_1^{k-m+1} x_2 \ldots x_{m-2} x_m$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial x_m} g(x_1, \ldots, x_m) = \sum_{k=m} a_k x_1^{k-m+1} x_2 \ldots x_{m-1}$$

Oleh kerana $0 \in \underline{x}$ dan $\underline{x}_{ij} = \underline{x}$ untuk i, j yang berkaitan maka seperti yang diterangkan dalam Bahagian 6 pilihlah $x = 0$ sebab x boleh dipilih sebarang sehingga diperoleh

$$\frac{\partial}{\partial x_i} \underline{g}(\underline{x}_{i1}, \ldots, \underline{x}_{ii}, x, \ldots, x)$$

$$= a_i \underline{x}_{i1} \ldots \underline{x}_{ii-1} + a_{i+1} \underline{x}_{i1} \ldots \underline{x}_{ii-1} x + \ldots + a_{m-1} \underline{x}_{i1} \ldots \underline{x}_{ii-1} x \ldots x + \sum_{k=m}^{n} a_k \underline{x}_{i1}^{k-m+1} \underline{x}_{ii-1} x \; x$$

$$= a_i \underline{x}_{i1} \ldots \underline{x}_{ii-1}$$

$$= a_i \underline{x}^{i-1} \qquad (1 \leqslant i \leqslant m-1)$$

dan

$$\frac{\partial}{\partial x_m} \underline{g}(\underline{x}_{m1}, \ldots, \underline{x}_{mm}) = \sum_{k=m}^{n} a_k \underline{x}_{m1}^{k-m+1} \ldots \underline{x}_{mm-1}$$

$$= \sum_{k=m}^{n} a_k \underline{x}^{k-1}$$

Oleh sebab itu menerusi (6.8) diperoleh

$$\underline{g}'(\underline{x}) = a_1 + a_2 \underline{x} + a_3 \underline{x}^2 + \ldots + a_i \underline{x}^{i-1} + \ldots + a_{m-1} \underline{x}^{m-2} + \sum_{k=m}^{n} a_k \underline{x}^{k-1}$$

$$= \sum_{k=1}^{n} a_k \underline{x}^{k-1} \tag{7.6}$$

Jika $x_1 = \ldots = x_m = x$ dalam (7.5) maka diperoleh

$$g(x_1, \ldots, x_m) = g(x, \ldots, x) = f(x)$$

sehingga

$$\underline{f}'(\underline{x}) = \sum_{k=1}^{n} k a_k \underline{x}^{k-1}$$

yang jelas memenuhi

$$\underline{g}'(\underline{x}) \subseteq \underline{f}'(\underline{x})$$

dan

$$w(\underline{g}'(\underline{x})) \leqslant w(\underline{f}'(\underline{x}))$$

dengan $\underline{g}'(\underline{x})$ diberi oleh (7.6).

Sekarang daripada (7.6) kita bina bentuk tersarang berikut

$$g_S'(x) = a_1 + (a_2 + a_4 \underline{x}^2 + a_6 \underline{x}^4 + \ldots a_n \underline{x}^{n-2})\underline{x} + (a_3 + a_5 \underline{x}^2 + a_7 \underline{x}^4 + \ldots + a_{n-1} \underline{x}^{n-4}) \underline{x}^2 \quad (7.7)$$

untuk n genap dan

$$\underline{g}_S'(\underline{x}) = a_1 + (a_2 + a_4 \underline{x}^2 + a_6 \underline{x}^4 + \ldots a_{n-1} \underline{x}^{n-3}) \underline{x} + (a_3 + a_5 \underline{x}^2 + a_7 \underline{x}^4 + \ldots + a_n \underline{x}^{n-3}) \underline{x}^2 \quad (7.8)$$

untuk n ganjil yang kedua-duanya memenuhi (7.3) dan (7.4).

Daripada (7.7) diperoleh

$$\underline{g}_T'(\underline{x}) = a_1 + \underline{x}(a_2 + \underline{x}^2(a_4 + \underline{x}^2(a_6 + \ldots + \underline{x}^2(a_{n-2} + a_n \underline{x}^2)\ldots))) + \underline{x}^2(a_3 + \underline{x}^2(a_5 + \underline{x}^2(a_7 + \ldots + \underline{x}^2(a_{n-3} + a_{n-1}\underline{x}^2)\ldots))) \quad (7.9)$$

untuk n genap dan

$$\underline{g}_T'(\underline{x}) = a_1 + \underline{x}(a_2 + \underline{x}^2(a_4 + \underline{x}^2(a_5 + \ldots + \underline{x}^2(a_{n-a} + a_{n-1}\underline{x}^2)\ldots))) + \underline{x}^2(a_3 + \underline{x}^2(a_5 + \underline{x}^2(a_7 + \ldots + \underline{x}^2(a_{n-2} + a_n \underline{x}^2)\ldots))) \quad (7.10)$$

untuk n ganjil.

Persamaan (7.6) dapat ditulis dalam bentuk tersarang Alefeld dan Herzberger (Alefeld, Herzberger 1983) seperti berikut.

$$\underline{g}_{SA}'(\underline{x}) = a_1 + \underline{x}(a_2 + \underline{x}(a_3 + \underline{x}(a_4 + \ldots + \underline{x}(a_{n-1} + a_n \underline{x})\ldots))) \quad (7.11)$$

Diketahui (Moore, 1966) bahawa

$$\underline{g}'(\underline{x}) \subseteq \underline{g}_T'(\underline{x}) \text{ dan } \underline{g}'(\underline{x}) \subset \underline{g}_{SA}'(\underline{x})$$

Oleh sebab itu

$$\underline{g}'(\underline{x}) \subseteq \underline{g}_T'(\underline{x}) \cap \underline{g}_{SA}'(\underline{x})$$

Jadi jika $0 \in \underline{x}$ maka kita gunakan rumus

$$\underline{g}_{TB}'(\underline{x}) = \underline{g}_T'(\underline{x}) \cap \underline{g}_{SA}'(\underline{x}) \quad (7.12)$$

bagi menggantikan $\underline{f}'(\underline{x})$ dalam (5.5). Jelas bahawa

$$\underline{g}_{TB}'(\underline{x}) \subseteq \underline{g}_T'(\underline{x}) \text{ dan } \underline{g}_{TB}'(\underline{x}) \subseteq \underline{g}_{SA}'(\underline{x})$$

8. CONTOH-CONTOH

Kaedah-kaedah di atas diilustrasikan oleh contoh-contoh berikut dalam satu lelaran sahaja.

Contoh 8.1:

Misalkan $f : R^1 \to R^1$ ditakrifkan oleh

$$f(x) = x^4 - 1$$

yang mempunyai pensifar 1 di dalam selang [0.5, 3.5] dan pilihlah x = 2.

Menerusi (6.9) diperoleh

$$\underline{N}(\underline{x}) = 2 - f(2)/4\underline{x}^3$$

yang memberikan $\underline{N}([10.5, 3.5]) = [-28, 1.913]$.

Jika dibentuk

$$g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1 x_2 x_3 x_4 - 1$$

maka menerusi (6.7) diperoleh

$$\underline{N}_4(x) = 2 - \frac{f(2)}{x^3 + x^2\underline{x}_{21} + x\underline{x}_{31}x_{32} + \underline{x}_{41}\underline{x}_{42}\underline{x}_{43}}$$

dengan

$$\underline{g}'(\underline{x}) = x^3 + x^2\underline{x}_{21} + x\underline{x}_{31}\underline{x}_{32} + \underline{x}_{41}\underline{x}_{42}\underline{x}_{43}$$

dan setiap $\underline{x}_{ij} = [0.5, 3.5]$ (i=2, 3, 4; j=1, 2, 3)

sehingga memberikan

$$\underline{N}_4([0.5, 3.5) = [0.5882, 1.8330]$$

Dengan menggunakan (4.3) kita mengira

$$\underline{N}_S(\underline{x}) = 2 - \frac{f(2)}{x^3 + \underline{x}(x^2 + \underline{x}(x + \underline{x}))}$$

yang memberikan

$$\underline{N}_S([0.5, 3.51]) = [0.5882, 1.8322]$$

dengan

$$\underline{g}_S'(\underline{x}) = x^3 + \underline{x}(x^2 + \underline{x}(x + \underline{x})).$$

Jelas didapati bahawa

$$\underline{N}_S(\underline{x}) \subseteq \underline{N}_4(\underline{x}) \subseteq \underline{N}(\underline{x})$$

untuk $\underline{x} = [0.5, 3.5]$.

Contoh 8.2:

Misalkan $f : R^1 \to R^1$ ditakrif oleh

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x$$

yang mempunyai pensifar 3 dalam selang [2.5, 3.7] dan pilihlah x = 3.1.

Dengan menggunakan $\underline{f}'_A(\underline{x})$, $\underline{g}'(\underline{x})$ dan $\underline{g}'_S(\underline{x})$ yang masing-masing berbentuk

$$\underline{f}'_A(\underline{x}) = 4\underline{x}^3 - 36\underline{x}^2 + 94\underline{x} - 60,$$

$$\underline{g}'(\underline{x}) = (x^3 - 12x^2 + 47x - 60) + (\underline{x}x^2 - 12\underline{x}x + 47\underline{x}) + (\underline{x}^2x - 12\underline{x}^2) + \underline{x}^3,$$

dan

$$\underline{g}'_S(\underline{x}) = x^3 - 12x^2 + 47x - 60 + \underline{x}(x^2 - 12x + 47 + \underline{x}(x - 12 + \underline{x}))$$

memberikan

$$\underline{f}'_A(\underline{x}) = [-225.34, 265.412],$$

$$\underline{g}'(\underline{x}) = [-125.224, 134.72]$$

dan

$$\underline{g}'_S(\underline{x}) = [-15.628, 23.888]$$

sehingga kita pasti memperoleh

$$\underline{N}_S(\underline{x}) \subseteq \underline{N}_4(\underline{x}) \subseteq \underline{N}(\underline{x})$$

dengan masing-masing $\underline{N}_S(\underline{x})$, $\underline{N}_4(\underline{x})$ dan $\underline{N}(\underline{x})$ diperoleh dengan menggunakan $\underline{g}'_S(\underline{x})$, $\underline{g}'(\underline{x})$ dan $\underline{f}'_A(\underline{x})$ dalam rumus Newton selang untuk selang $\underline{x} = [2.5, 3.7]$

Contoh 8.3:

Misalkan $f : R^1 \to R^1$ ditakrif oleh

$$f(x) = x^4 - 12x^3 + 47x^2 - 60x + 24$$

yang mempunyai pensifar 1 dalam selang [−1, 2]. Jadi pilihlah x = 0 sebab $0 \in [-1, 2]$.

Jelas didapati bahawa

$$\underline{f}'_A([-1, 2]) = [-314, 160],$$

menerusi (7.6) diperoleh

$$\underline{g}'([-1, 2]) = [-159, 42]$$

dan menerusi (7.9) (sebab n genap) diperoleh

$$\underline{g}'_T(\underline{x}) = -60 + \underline{x}(47 + \underline{x}^2(1)) + \underline{x}^2(-12)$$

sehingga memberikan

$$\underline{g}'_T([-1, 21]) = [-159, 42].$$

Akan tetapi menerusi (7.11) diperoleh

$$\underline{g}'_{SA}(\underline{x}) = -60 + \underline{x}(47 + \underline{x}(-12 + \underline{x}))$$

memberikan

$$\underline{g}'_{SA}(\underline{x}) = [-120, 60]$$

Oleh sebab itu dengan menggunakan (7.12) diperoleh

$$\underline{g}'_{TB}(\underline{x}) = [-120, 42].$$

Jadi jelas bahawa

$$\underline{g}'_{TB}(\underline{x}) \subseteq \underline{g}'_{SA}(\underline{x}) \subseteq \underline{f}'_A(\underline{x})$$

dan

$$\underline{g}'_{TB}(\underline{x}) \subseteq \underline{g}'_T(\underline{x}) = \underline{g}'(\underline{x}) \subseteq \underline{f}'_A(\underline{x})$$

untuk $\underline{x} = [-1, 2]$.

Oleh kerana $\underline{f}'_A(\underline{x})$ dalam Contoh 8.2 dan $\underline{f}'_A(\underline{x})$, $\underline{g}'(\underline{x})$, $\underline{g}'_T(\underline{x})$, $\underline{g}'_{SA}(\underline{x})$, $\underline{g}'_{TB}(\underline{x})$ dalam contoh 8.3 mengandungi 0 maka kaedah yang disarankan dalam (Mohd, 1987a) hendaklah digunakan untuk mengira

$$\underline{N}([-1, 2]), \underline{N}_4([-1, 2]), \underline{N}_T([-1, 2]),$$
$$\underline{N}_{SA}([-1, 2]) \text{ dan } \underline{N}_{TB}([-1, 2]).$$

9. KESIMPULAN

Berdasarkan perbahasan dalam Bahagian 4 dan Bahagian 7, dan contoh-contoh 8.1, 8.2 dapatlah kita katakan bahawa kaedah pengubahsuaian tersarang lebih baik daripada kaedah pengubahsuaian Hansen dalam mengira dan membatasi pensifar syata fungsi polinomial (1.1). Begitu juga kaedah tersarang (7.12) lebih baik daripada kaedah tersarang (7.11). Walau bagaimanapun pengiraan $\underline{g}'_{TB}(\underline{x})$ menerusi (7.12) memerlukan masa yang lebih kerana ia melibatkan pengiraan $\underline{g}'_T(\underline{x})$ dan $\underline{g}'_{SA}(\underline{x})$.

Dengan cara yang sama di atas kaedah yang disarankan di sini dapat dikembangkan untuk $f : R^n \to R^n$ yang akan kita terangkan dalam makalah yang lain.

RUJUKAN

ALEFELD, G., and J. HERZBERGER. (1983): Introduction to Interval Computations, Academic Press, New York.

HANSEN, E.R. (1987a) : A Globally Convergent Interval Method for Computing and Bounding Real Roots, *BIT,* **13**: 415-424.

HANSEN, E.R. (1978b) : Interval Forms of Newtons Method, *Computing.* **20**: 153-163.

MOHD, I.B. (1987a) : The Comparison Between Hansen's Method and Alefeld's Method for Computing and Bounding Real Zeros of a Class of Functions with one Variable, *Pertanika,* **10(1)** : 89-95.

MOHD, I.B. (1987b) : Aritmetik Selang, *Berita Matematik,* **32** : 15-22.

MOORE, R.E. (1966) : Interval Analysis, Prentice-Hall.

NICKEL, K. (1971) : On the Newton Method in Interval Analysis, Mathematics Research Center Report 1136, University of Wisconsin.

(Terima 13 November, 1987)