UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

KAEDAH PENENTUAN SAIZ p−ADIC FUNGSI FAKTORIAL DAN APLIKASI DALAM PEMBINAAN POLIHEDRON NEWTON

RAFIKA BINTI ZULKAPLI

IPM 2010 10

KAEDAH PENENTUAN SAIZ p – ADIC FUNGSI FAKTORIAL DAN APLIKASI DALAM PEMBINAAN POLIHEDRON NEWTON

RAFIKA BINTI ZULKAPLI

MASTER SAINS
UNIVERSITI PUTRA MALAYSIA

2010

KAEDAH PENENTUAN SAIZ p – ADIC FUNGSI FAKTORIAL DAN APLIKASI DALAM PEMBINAAN POLIHEDRON NEWTON

Oleh

RAFIKA BINTI ZULKAPLI

Tesis Yang Dikemukakan ke Sekolah Pengajian Siswazah, Universiti Putra Malaysia Sebagai Memenuhi Keperluan Untuk Ijazah Master Sains

Oktober 2010

Abstrak tesis yang dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia sebagai memenuhi keperluan untuk ijazah Master Sains

KAEDAH PENENTUAN SAIZ $p-$ ADIC FUNGSI FAKTORIAL DAN APLIKASI DALAM PEMBINAAN POLIHEDRON NEWTON

Oleh

RAFIKA BINTI ZULKAPLI

Oktober 2010

Pengerusi: Profesor Dato' Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD

Institut: Institut Penyelidikan Matematik

Penyelidikan tentang saiz $p-$adic ini adalah berkaitan dengan penentuan anggaran hasil tambah eksponen $S(f;q)=\sum_{\underset{\sim}{x} \bmod q} \exp\left(\frac{2\pi i f(\underset{\sim}{x})}{q}\right)$ yang telah ditunjukkan oleh penyelidik terdahulu bersandar kepada kekardinalan $|V|$ iaitu bilangan unsur dalam set $V=\left\{\underline{x} \bmod q \mid \underline{f}_{\underline{x}} \equiv \underline{0} \bmod q\right\}$ dengan $\underline{f}_{\underline{x}}$ polinomial terbitan separa f terhadap $\underline{x}=(x_1,x_2,...,x_n)$.

Bagi $q=p^{\alpha}$ dengan p perdana dan $\alpha>0$, telah ditunjukkan bahawa bagi polinomial dua pembolehubah berpekali integer $f(x,y)$, nilai $|V|$ adalah bersandar pula kepada saiz $p-$adic punca-punca sepunya f_x dan f_y polinomial terbitan separa $f(x,y)$ terhadap x dan y. Saiz $p-$adic punca sepunya ini pula didapati bergantung kepada saiz $p-$adic pekali-pekali dalam $f(x,y)$.

Tumpuan penyelidikan yang dijalankan adalah untuk membangunkan suatu kaedah itlak bagi menentukan saiz $p-$adic bagi fungsi faktorial dengan p perdana. Kajian ini dimulakan dengan menentukan saiz $p-$adic fungsi faktorial yang melibatkan nombor perdana p,q dan eksponennya. Berdasarkan keputusan yang diperolehi, kami meneliti pula saiz $p-$adic bagi $n!$ dengan n diungkapkan sebagai penghuraian kuasa perdana yang berbentuk $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ dengan $\alpha_i > 0$ bagi $i = 1, 2, \ldots, k$.

Hasil kajian yang diperoleh adalah rumus saiz $p-$adic bagi $p^{\alpha}!$, $q^{\alpha}!$, $\left(p^{\alpha} q^{\beta}\right)!$ dengan $p \neq q, \alpha, \beta > 0$ dan $\left(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}\right)!$ dengan $p_1 \neq p_2$, $p_2 \neq p_3$ dan $p_1 \neq p_3$ sedemikian hingga $p_1 < p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ dengan $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$.

Kemudian dengan mengaplikasikan hasil terdahulu ini diperolehi pula rumus saiz $p-$adic bagi $n!$ dengan $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3} \ldots p_k^{\alpha_k}$ dan $\alpha_i > 0$ bagi $i = 1, 2, \ldots, k$ yang dibahagikan kepada 2 kes peringkat n iaitu iaitu $ord_p\, n = 0$ dan $ord_p\, n > 0$. Rumus ini juga digunakan untuk memperincikan lagi hasil keputusan yang diberikan oleh penyelidik terdahulu.

Hasil yang diperoleh ini kemudiannya digunakan untuk menentukan saiz $p-$adic hasil tambah dan hasil darab faktorial $n!, r!$ dengan $n > r > 0$ berdasarkan syarat-syarat tertentu. Seterusnya, rumus saiz $p-$adic bagi $n!$ ini juga digunakan untuk menentukan saiz $p-$adic fungsi faktorial yang lain seperti ${}^{n}P_{r}$ dengan

${}^{n}P_{r}=\frac{n!}{(n-r)!}$ dan ${}^{n}C_{r}$ dengan ${}^{n}C_{r}=\frac{n!}{r!(n-r)!}$ bagi kes $n>r>0$ dengan syarat-syarat yang telah ditetapkan.

Keputusan penentuan saiz $p-$adic bagi ${}^{n}C_{r}$ ini diaplikasikan untuk membina gambarajah Newton dan Polihedron Newton yang disekutukan dengan suatu polinomial yang berbentuk $f(x,y)=(ax+by)^{n}+\ell(x,y)$ dalam $\mathrm{Z}[x,y]$ dengan $\ell(x,y)$ menandakan bahagian linear $f(x,y)$ berpekali integer dalam ruang Euklidan berdimensi-tiga.

Abstract of thesis presented to the Senate of Universiti Putra Malaysia
in fulfilment of the requirement for the degree of Master of Science

A METHOD FOR DETERMINATION OF $p-$ ADIC SIZES OF FACTORIAL FUNCTIONS AND ITS APPLICATION IN THE CONSTRUCTION OF A NEWTON POLYHEDRON

By

RAFIKA BINTI ZULKAPLI

October 2010

Chair: Professor Dato' Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD

Institute: Institute for Mathematical Research

The research on determination of $p-$adic sizes is in relation to the research on the estimation of the exponential sum of the type $S(f;q)=\sum_{\underset{\sim}{x} \bmod q} \exp\left(\frac{2\pi i f(\underset{\sim}{x})}{q}\right)$. The value of $S(f;q)$ has been shown by earlier researchers to depend on the estimate of the cardinality $|V|$, the number of elements contained in the set $V=\left\{\underline{x} \bmod q \mid \underline{f}_{\underline{x}} \equiv \underline{0} \bmod q\right\}$ where $\underline{f}_{\underline{x}}$ is the partial derivative of f with respect to $\underline{x}=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$.

For $q=p^\alpha$, where p is a prime and $\alpha>0$, it is shown that for any polynomial with two variables of integer coefficient, the value of $|V|$ can be derived from the $p-$adic sizes of common zeros for f_x and f_y where the polynomials are the partial

derivatives of $f(x,y)$ with respect to x and y. The $p-$adic sizes of the common zeros in turn depend on the $p-$adic sizes of the coefficients of $f(x,y)$.

In this study we propose a method on determining the $p-$adic sizes of factorial functions where p is a prime. This research begins with investigating the $p-$adic sizes of prime numbers p,q and their factorials. Based on the results, we generalize a method for determining the $p-$adic sizes of $n!$ where n can be written as prime power decomposition with $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ where $\alpha_i > 0$ for $i = 1,2,\ldots,k$.

Based on the results, we present the formulae for determining the $p-$sizes of $p^{\alpha}!$, $q^{\alpha}!$, $(p^{\alpha}q^{\beta})!$ for $p \neq q, \alpha, \beta > 0$ and $(p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3})!$ where $p_1 \neq p_2$, $p_2 \neq p_3$ and $p_1 \neq p_3$ such that $p_1 < p_2^{\alpha_2} p_3^{\alpha_3}$ and $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 > 0$.

By using the previous results, we determine the $p-$adic sizes of $n!$ where $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \ldots p_k^{\alpha_k}$ for $ord_p\, n = 0$ and $ord_p\, n > 0$. These results are also used to further detail the results given by previous researchers.

By using the formulae, we present the method to detemine the $p-$adic sizes of the sum and the product of the factorial $n!, r!$ where $n > r > 0$ based on some conditions. Then we determine the $p-$adic sizes of ${}^nP_r$ where ${}^nP_r = \dfrac{n!}{(n-r)!}$ and ${}^nC_r$ where ${}^nC_r = \dfrac{n!}{r!(n-r)!}$ for $n > r > 0$ by using the formulae of the $p-$adic sizes of $n!$ based on some conditions.

The formulae for determining the $p-$adic sizes of ${}^{n}C_{r}$ will be applied for constructing Newton diagram and Newton polyheron associated with a polynomial $f(x,y)=(ax+by)^{n}+\ell(x,y)$ where $\ell(x,y)$ is the linear part of $f(x,y)$ with integer coefficients in three-dimensional Euclidean space.

PENGHARGAAN

Dengan nama Allah Yang Maha Pengasih Lagi Maha Penyayang.

Sebagai pemula bicara, saya ingin memanjatkan rasa syukur yang tidak terhingga dengan izin dan limpah kurniaNya saya berjaya menyempurnakan penulisan tesis ini.

Saya ingin merakamkan ucapan terima kasih yang tidak terhingga kepada Pengerusi Jawatankuasa Penyeliaan iaitu Profesor Dato' Dr Hj. Kamel Ariffin bin Mohd Atan yang banyak membantu dengan penuh kesabaran dan tidak jemu memberi nasihat dan bimbingan sepanjang pengajian dan sehingga tesis ini berjaya disiapkan.

Tidak dilupakan juga jutaan terima kasih kepada Dr. Siti Hasana binti Sapar diatas segala nasihat, tunjukajar dan pandangan yang diberikan sepanjang pengajian sehingga selesainya penulisan tesis ini.

Ucapan terima kasih ini juga didedikasikan khas buat emak, ayah dan adik-adik yang banyak berkorban dan sentiasa memberi sokongan yang tidak berbelah bahagi sehingga selesainya penulisan tesis ini. Buat teman-teman seperjuangan dan juga mereka yang membantu saya sepanjang pengajian di Inspem, terima kasih atas segala nasihat dan bantuan yang diberikan serta kesudian anda berkongsi pahit manis sepanjang penulisan tesis ini.

Saya mengesahkan bahawa satu Jawatankuasa Peperiksaan Tesis telah berjumpa pada 21 Oktober 2010 untuk menjalankan peperiksaan akhir bagi Rafika binti Zulkapli bagi menilai tesis beliau yang bertajuk "Kaedah Penentuan Saiz $p-$Adic Fungsi Faktorial dan Aplikasi dalam Pembinaan Polihedron Newton" mengikut Akta Universiti dan Kolej Universiti 1971 dan Perlembagaan Universiti Putra Malaysia [P.U.(A) 106] 15 Mac 1998. Jawatankuasa tersebut telah memperakukan bahawa calon ini layak dianugerahi ijazah Master Sains.

Ahli Jawatankuasa Peperiksaan Tesis adalah seperti berikut:

Mohd. Rizam Abu Bakar, PhD
Profesor Madya
Fakulti Sains
Universiti Putra Malaysia
(Pengerusi)

Mohamad Rushdan Md. Said, PhD
Profesor Madya
Fakulti Sains
Universiti Putra Malaysia
(Pemeriksa Dalam)

Mat Rofa Ismail, PhD
Profesor Madya
Fakulti Sains
Universiti Putra Malaysia
(Pemeriksa Dalam)

Hailiza Kamarulhaili, PhD
Pensyarah
Universiti Sains Malaysia
(Pemeriksa Luar)

SHAMSUDDIN SULAIMAN, PhD
Profesor dan Timbalan Dekan
Sekolah Pengajian Siswazah
Universiti Putra Malaysia

Tarikh: 18 Januari 2011

Tesis ini telah dikemukakan kepada Senat Universiti Putra Malaysia dan telah diterima sebagai memenuhi syarat keperluan untuk ijazah Master Sains. Ahli Jawatankuasa Penyeliaan adalah sepeti berikut:

Kamel Ariffin bin Mohd Atan, PhD
Profesor
Insitut Penyelidikan Matematik
Universiti Putra Malaysia
(Pengerusi)

Siti Hasana binti Sapar, PhD
Fakulti Sains
Universiti Putra Malaysia
(Ahli)

____

HASANAH MOHD GHAZALI, PhD
Profesor dan Dekan
Sekolah Pengajian Siswazah
Universiti Putra Malaysia

Tarikh:

PERAKUAN

Saya memperakui bahawa tesis ini adalah hasil kerja saya yang asli melainkan petikan dan sedutan yang tiap-tiap satunya telah dijelaskan sumbernya. Saya juga memperakui bahawa tesis ini tidak pernah dimajukan sebelum ini, dan tidak dimajukan serentak dengan ini, untuk ijazah lain sama ada di Universiti Putra Malaysia atau di institusi lain.

RAFIKA BINTI ZULKAPLI

Tarikh: 21 Oktober 2010

SENARAI KANDUNGAN